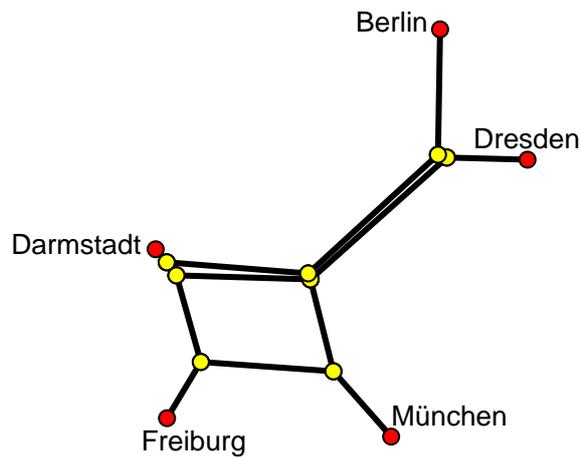




Technische Universität Darmstadt  
Fachbereich Mathematik  
Schlossgartenstraße 7  
64287 Darmstadt

Diplomarbeit

# Kombinatorik von Hypersimplex-Triangulierungen



Sven Herrmann

Oktober 2005

angefertigt unter Betreuung von Prof. Michael Joswig



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2. <math>F</math>- und <math>H</math>-Vektoren spezieller triangulierter Bälle</b>	<b>7</b>
2.1. Gleichungen für den $H$ -Vektor . . . . .	8
2.2. Gleichungen für den $F$ -Vektor . . . . .	10
2.3. Bemerkungen . . . . .	18
<b>3. Tight-Spans</b>	<b>21</b>
3.1. Tight-Spans und Triangulierungen des Hypersimplex . . . . .	22
3.2. Tight-Spans und lineare Optimierung . . . . .	28
3.3. Ein Algorithmus zur Berechnung des $F$ -Vektors . . . . .	32
<b>4. Obere und untere Schranken für den <math>F</math>-Vektor von Tight-Spans generischer Metriken</b>	<b>35</b>
4.1. Obere Schranke . . . . .	35
4.1.1. Eine Metrik für die obere Schranke . . . . .	39
4.2. Untere Schranke . . . . .	45
4.2.1. Eine Metrik für die untere Schranke . . . . .	46
<b>A. Genocchi-Zahlen</b>	<b>55</b>
A.1. Eine Rekursion für die Genocchi-Zahlen . . . . .	55

## *Inhaltsverzeichnis*

# 1. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit den sogenannten Tight-Spans metrischer Räume. Diese wurden erstmals 1964 von Isbell in [Isb64] betrachtet (dort unter dem Namen „injektive Hülle“). Wenn wir einen endlichen metrischen Raum betrachten, so kann der Tight-Span mit einem gewissen polytopalen Komplex identifiziert werden (vergleiche [Dre84]). In [SY04] wird bemerkt, dass dieser Komplex dual zu bestimmten Triangulierungen des Hypersimplex ist. Deshalb werden wir zu Beginn Triangulierungen von Bällen betrachten.

Endliche metrische Räume treten beispielsweise in der Biologie bei der sogenannten Phylogenetischen Analyse beziehungsweise Taxonomie auf. Dort wird der genetische „Abstand“ von mehreren Lebewesen gemessen, um ein Abstammungsverhältnis festzustellen. Man möchte dann beispielsweise wissen, ob eine so vorgegebene Metrik als (Abstammungs-)Baum dargestellt werden kann (siehe dazu zum Beispiel [DMT96] oder [Hub97]). In diesem Fall hätte der Tight-Span Dimension eins. Die Dimension des Tight-Spans kann also als ein Maß dafür gesehen werden, wie weit eine Metrik von einem solchen Baum entfernt ist.

Man betrachtet dann den  $F$ -Vektor des Tight-Spans, der angibt, wie viele Seiten welcher Dimension im zugeordneten Komplex  $C$  vorkommen. Develin zeigte in [Dev04], dass die Dimension von Tight-Spans generischer Metriken auf  $n$  Punkten zwischen  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  und  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  liegt. Dieses Ergebnis war auch die Motivation für die vorliegende Arbeit, in der wir uns mit dem  $F$ -Vektor von Tight-Spans beschäftigen und Schranken für die Anzahl der Seiten verschiedener Dimensionen beweisen werden.

## Aufbau

Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit triangulierten Bällen. Insbesondere werden wir dabei solche mit der Eigenschaft betrachten, dass innere Simplexe nur ab einer bestimmten Dimension vorkommen. Hier werden wir sehen, dass dann schon weitere Komponenten des  $H$ -Vektors des inneren Teils der Triangulierung bestimmt sind. Im zweiten Abschnitt werden wir uns auf den Fall beschränken, in dem keine inneren Simplexe der Dimension kleiner als  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  vorkommen, und Bedingungen für den  $F$ -Vektor des inneren Teils der Triangulierung beweisen. Diese können interessanterweise mit den Genocchi-Zahlen (siehe Anhang A) in Verbindung gebracht werden. Zum Schluss machen wir noch einige Bemerkungen.

Im dritten Kapitel wird die Dualität von Tight-Spans und Triangulierungen des Hyper-

## 1. Einleitung

simplex  $\Delta(n, 2)$  erläutert. Außerdem wird ein Zusammenhang zwischen der Triangulierung des Randes des Hypersimplex und den Tight-Spans der Einschränkungen der Metrik hergestellt. Weiter stellen wir die von Develin in [Dev04] entwickelte Theorie über Tight-Spans und gewisse lineare Programme vor und benutzen sie um einige Hilfsresultate herzuleiten. Zum Schluss wird skizziert, wie man damit einen Algorithmus zur Berechnung des  $F$ -Vektors bekommt.

Im vierten Kapitel wird eine obere Schranke für den  $H$ - und den  $F$ -Vektor von Tight-Spans bewiesen und ein Beispiel angegeben, für das diese erreicht wird. Zusätzlich wird für die schon in [Dev04] bewiesene Mindestdimension von Tight-Spans generischer Metriken eine minimale Anzahl von Simplexen dieser maximalen Dimension gezeigt und ebenfalls ein Beispiel angegeben, für das diese erreicht wird.

Im Anhang befassen wir uns schließlich mit den Genocchi-Zahlen.

## Abbildungen

Das Titelbild stellt eine Visualisierung des Tight-Spans einer Metrik da, die die gegenseitigen Entfernungen der Universitätsstädte Darmstadt, Berlin, München und Freiburg misst.

Diese Abbildung, sowie die Abbildungen 2.1 und 3.2 und alle weiteren Darstellungen von Tight-Spans wurden mit Hilfe des Programms Polymake [GJ00] in Javaview [PHPR05] visualisiert. Bei den Bildern der Tight-Spans wurden zwei verschiedene Arten der Visualisierung benutzt. Die eine Möglichkeit (Titelbild, Abbildungen 3.1, 4.1 und Abbildung 4.5 oben) versucht die Abstände der Punkte möglichst genau zu reproduzieren. (Soweit dies bei einer dreidimensionalen Darstellung eines höherdimensionalen Objekts möglich ist.) Bei der anderen Darstellungsform (Abbildung 4.2 und Abbildung 4.5 unten) wird auf die metrischen Eigenschaften keine Rücksicht genommen, und eine möglichst übersichtliche kombinatorische Darstellung erzeugt. In beiden Darstellungsformen sind die dunklen Punkte die ursprünglichen Punkte der Metrik, die helleren die Punkte, die im Tight-Span dazukommen.

## 2. $F$ - und $H$ -Vektoren spezieller triangulierter Bälle

Für einen polytopalen Komplex\*  $C$  zählt der  $f$ -Vektor  $f(C)$  in  $f_i(C)$  die Anzahl der Seiten der Dimension  $i$ . (Dabei betrachten wir die leere Menge als Seite der Dimension  $-1$ , das heißt es gilt  $f_{-1}(C) = 1$ .) Ist  $C$  ein  $(n-1)$ -Ball  $B$  (beispielsweise ein trianguliertes Polytop), so wird auch auf den Rand eine Unterteilung induziert und wir können den  $f$ -Vektor  $f(\partial B)$  des Randes betrachten. Mit  $f(B^\circ) := f(B) - f(\partial B)$  bezeichnen wir den  $f$ -Vektor des inneren Anteils der Triangulierung<sup>†</sup>. Zusätzlich zum  $f$ -Vektor betrachtet man oft auch den  $h$ -Vektor eines Polytops beziehungsweise eines polytopalen Komplexes, der sich aus dem  $f$ -Vektor durch

$$\begin{aligned} h_i(B) &:= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(B), \\ h_i(\partial B) &:= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-1-j}{i-j} f_{j-1}(\partial B) \quad \text{und} \\ h_i(B^\circ) &:= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(B^\circ) \end{aligned}$$

ergibt. Manchmal spielt auch der  $g$ -Vektor, definiert durch  $g_0 := 1$  und  $g_i := h_i - h_{i-1}$  für  $i \geq 1$ , eine Rolle.

Zusätzlich definieren wir den  $F$ - und den  $H$ -Vektor von  $B$  durch

$$H_i(B) := h_{n-i}(B^\circ) \quad \text{und} \quad F_i(B) := f_{n-i-1}(B^\circ).$$

Dann gelten die Beziehungen

$$H_i(B) = \sum_{j=i}^n (-1)^{i-j} \binom{j}{i} F_j(B) \quad \text{und} \quad F_i(B) = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} H_j(B). \quad (2.0.1)$$

---

\*Ein polytopaler Komplex ist eine endliche Menge  $C$  von Polytopen, sodass für jedes Polytop  $P \in C$  auch alle Seiten von  $P$  in  $C$  enthalten sind, und für zwei Polytope  $P, Q \in C$  deren Schnitt  $P \cap Q$  eine Seite von beiden ist. Die Elemente von  $C$  nennen wir auch *Seiten* von  $C$ . Für eine Einführung in die Theorie der Polytope siehe beispielsweise [Zie95] oder [Grü03]. Eine historische Referenz ist [Sch01].

<sup>†</sup>Man beachte, dass es sich bei  $B^\circ$  nicht um einen polytopalen Komplex handelt.

## 2.1. Gleichungen für den $H$ -Vektor

Für ein  $n$ -dimensionales simpliziales\* Polytop  $P$  gelten die bekannten Dehn-Sommerville-Gleichungen  $h_i(P) = h_{n-i}(P)$  (für einen Beweis siehe beispielsweise [McM71], [Sta80] oder [Grü03]). Sie können auf sogenannte eulersche Pseudomannigfaltigkeiten und damit insbesondere auf beliebige triangulierte Sphären verallgemeinert werden [Kle64].

Um unsere Gleichungen herzuleiten, betrachten wir eine interessante Folgerung aus diesen verallgemeinerten Dehn-Sommerville-Gleichungen, die den  $h$ -Vektor eines triangulierten Balles mit dem  $g$ -Vektor des Randes in Verbindung bringt:

**Satz 2.1.1 (Theorem 15.3.6 in [BB97])**

Für einen triangulierten  $(n-1)$ -Ball  $B$  und dessen  $(n-2)$ -dimensionale Randsphäre gilt

$$g_i(\partial B) = h_i(B) - h_{n-i}(B). \quad (2.1.2)$$

Daraus können wir als erstes einen einfachen Zusammenhang zwischen dem neu definierten  $H$ -Vektor und dem bekannten  $h$ -Vektor eines triangulierten Balles angeben. In etwas anderer Form findet man diesen Satz auch in [McM04, Theorem 2.3].

**Satz 2.1.2**

Für einen triangulierten  $(n-1)$ -Ball  $B$  gilt

$$H_i(B) = h_i(B).$$

*Beweis.* Nach Satz 2.1.1 gilt

$$\begin{aligned} h_{n-i}(B) &= h_i(B) - g_i(\partial B) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(B) \\ &\quad - \left( \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-1-j}{i-j} f_{j-1}(\partial B) - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \binom{n-1-j}{i-1-j} f_{j-1}(\partial B) \right) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} (f_{j-1}(B^\circ) + f_{j-1}(\partial B)) - \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(\partial B) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(B^\circ) = h_i(B^\circ) = H_{n-i}(B). \end{aligned}$$

□

Außerdem machen wir mit Satz 2.1.1 eine einfache Beobachtung, aus der wir eine wichtige Folgerung ziehen:

---

\*Ein Polytop heißt *simplizial*, wenn alle echten Seiten Simplexe sind.

**Satz 2.1.3**

Sei  $B$  ein triangulierter Ball mit  $h_i(B) = 0$  für  $i > k$ , dann gilt

$$\begin{aligned} g_i(\partial B) &= h_i(B) && \text{für } i < n - k \quad \text{und} \\ g_i(\partial B) &= -h_{n-i}(B) && \text{für } i > k. \end{aligned}$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 2.1.1. □

**Korollar 2.1.4**

Sei  $B$  ein triangulierter Ball, in dem alle inneren Simplexe mindestens Dimension  $k$  haben. Dann gilt

$$\begin{aligned} H_i(B) &= h_i(B) = g_i(\partial B) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(\partial B) && \text{für } i \leq k \quad \text{und} \\ H_i(B) &= h_i(B) = 0 && \text{für } i \geq n - k. \end{aligned}$$

Man beachte, dass für  $i \leq k$  auch  $f_{j-1}(\partial B) = f_{j-1}(B)$  gilt und damit in der oberen Gleichung  $h_i(B) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(\partial B)$  trivial ist.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt  $F_{n-i-1}(B) = f_i(B^\circ) = 0$  für  $i < k$ , also  $F_i(B) = 0$  und wegen Gleichung (2.0.1) und Satz 2.1.2 auch  $H_i(B) = h_i(B) = 0$  für  $i > n - k - 1$ . Damit folgt aus Satz 2.1.3 die Behauptung. □

Insbesondere ist also bei Bällen, in denen alle inneren Simplexe mindestens Dimension  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  haben, der  $f$ -Vektor einer Triangulierung schon durch den  $f$ -Vektor der auf den Rand induzierten Triangulierung bestimmt.

Diese Beobachtung wird es uns am Ende ermöglichen, die obere Schranke für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans zu beweisen.

**Beispiel 2.1.5** Sei  $B$  die in Abbildung 2.1 dargestellte Triangulierung des Oktaeders. (Bis auf Symmetrien ist dies die einzig mögliche, wenn man keine inneren Punkte erlaubt.) Man erkennt, dass  $f(B) = (1, 6, 13, 12, 4)$ ,  $f(\partial B) = (1, 6, 12, 8)$  und somit  $f(B^\circ) = (0, 0, 1, 4, 4)$ . Wir berechnen die entsprechenden  $h$ -Vektoren zu  $h(B) = (1, 2, 1, 0, 0)$ ,  $h(\partial B) = (1, 3, 3, 1)$  und  $h(B^\circ) = (0, 0, 1, 2, 1)$ . Es gilt also  $H_i(B) = h_{n-i}(B^\circ) = h_i(B)$ , wie wir auch aus Satz 2.1.2 schließen können.

In  $B$  haben alle inneren Simplexe mindestens Dimension eins. Berechnen wir außerdem noch  $g(\partial B) = (1, 2, 0, -2, -1)$ , lassen sich Satz 2.1.3 und Korollar 2.1.4 für unser Beispiel verifizieren.

## 2. $F$ - und $H$ -Vektoren spezieller triangulierter Bälle

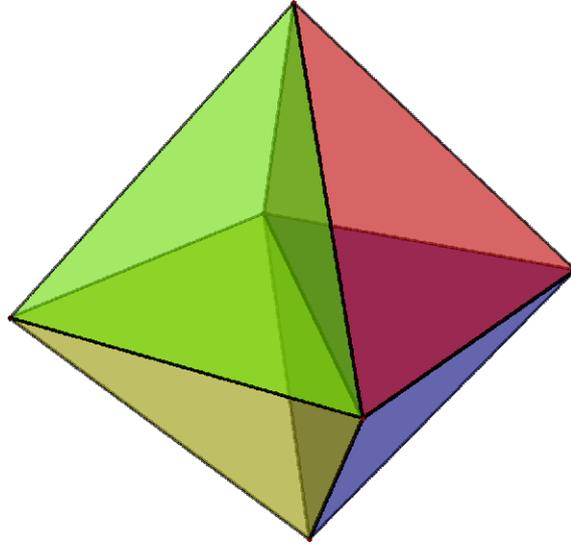


Abbildung 2.1.: Eine Triangulierung des Oktaeders.

### 2.2. Gleichungen für den $F$ -Vektor

In diesem Abschnitt werden wir triangulierte  $(n - 1)$ -Bälle  $B$  betrachten, die die Bedingung

$$F_i(B) = 0 \quad \text{für } i > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (2.2.3)$$

erfüllen, also keine inneren Simplexe der Dimension kleiner als  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  besitzen. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.1 erhalten wir damit zunächst folgende Gleichungen für den  $F$ -Vektor:

$$\begin{aligned} F_i(B) &\stackrel{(2.0.1)}{=} \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} H_j(B) \\ &\stackrel{\text{Kor. 2.1.4}}{=} \sum_{j=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \binom{j}{i} g_j(\partial B) + \begin{cases} 0; & n \text{ ungerade} \\ \binom{\frac{n}{2}}{i} H_{\frac{n}{2}}(B); & n \text{ gerade} \end{cases} \\ &= \sum_{j=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{i} \binom{n-k}{j-k} f_{k-1}(\partial B) + \begin{cases} 0; & n \text{ ungerade} \\ \binom{\frac{n}{2}}{i} H_{\frac{n}{2}}(B); & n \text{ gerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

Somit ist der  $F$ -Vektor von  $B$ , falls  $n$  ungerade ist, schon durch den  $f$ -Vektor des Randes  $\partial B$  bestimmt. Falls  $n$  gerade ist, kann er mit zusätzlich vorgegebenem  $F_{\frac{n}{2}}(B) = H_{\frac{n}{2}}(B)$  berechnet werden.

Zusätzlich werden wir hier noch anders vorgehen und Gleichungen für den  $F$ -Vektor direkt aus einer Version der entsprechenden Dehn-Sommerville-Gleichungen für den  $f$ -Vektor herleiten. Dabei werden wir auf den angekündigten Zusammenhang mit den Genocchi-Zahlen stoßen.

Wir halten im Folgenden  $B$  fest und schreiben zur Vereinfachung der Notation  $\partial_i := \partial_i(B) := f_{n-1-i}(\partial B)$  und  $F_i := F_i(B)$ .

**Satz 2.2.1**

Für den  $F$ -Vektor einer  $(n - 1)$ -dimensionalen triangulierten Mannigfaltigkeit mit Rand gilt

$$2F_i = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{n-k}{i-k} F_k - \partial_i, \quad \text{falls } i \text{ ungerade.} \quad (2.2.4)$$

*Beweis.* Für den  $f$ -Vektor einer  $m$ -dimensionalen triangulierten Mannigfaltigkeit  $B$  mit Rand gelten nach [Kla, Corollary 1.4] die Beziehungen

$$f_k(B) = \sum_{j=k}^m (-1)^{j+m} \binom{j+1}{k+1} (f_j(B) - f_j(\partial B)).$$

Somit erhalten wir mit unserer Notation

$$F_{n-1-k} + \partial_{n-1-k} = \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j+n-1} \binom{j+1}{k+1} F_{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1-k} (-1)^j \binom{n-j}{k+1} F_j.$$

Durch Setzen von  $i := n - 1 - k$  ergibt sich

$$F_i + \partial_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n-j}{n-i} F_j = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{n-j}{n-i} F_j + (-1)^i F_i.$$

Da  $i$  als ungerade angenommen wurde, folgt die Behauptung. □

Wenn wir nun unsere Voraussetzung (2.2.3) benutzen, können wir zeigen:

**Satz 2.2.2**

Für eine  $(n - 1)$ -dimensionale triangulierte Mannigfaltigkeit mit Rand, die keine inneren Simplexe der Dimension kleiner als  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  hat, gilt für die Komponenten  $F_0, F_2, \dots, F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ :

- Falls  $n \equiv_4 0, 1$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} T_{n-2k}^{2(i-k)+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^i D_{n-2k}^{2(i-k)} \partial_{2k+1} \quad \text{für } \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,$$

## 2. $F$ - und $H$ -Vektoren spezieller triangulierter Bälle

- falls  $n \equiv_4 2, 3$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} T_{n-2k}^{2(i-k)+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^i D_{n-2k}^{2(i-k)} \partial_{2k+1} \quad \text{für } \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} T_{n-2k}^{2(i-k)+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} D_{n-2k}^{2(i-k)} \partial_{2k+1} + 2F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \text{für } i = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor.$$

Dabei sind die Koeffizienten  $T_n^i$  und  $D_n^i$  durch

$$T_n^{2k+1} := \binom{n}{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-(2i+1)}{2(k-i)} T_n^{2i+1} \quad (0 \leq k < \frac{n}{2}) \quad \text{und} \quad (2.2.5)$$

$$D_n^0 := 1, \quad D_n^{2k} := -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-(2i+1)}{2(k-i)} D_n^{2i} \quad (0 < k < \frac{n}{2}) \quad (2.2.6)$$

rekursiv definiert.

Die Komponenten ungerader Dimension ergeben sich dann durch

$$F_{2i+1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^i T_{n-2k}^{2i+1-2k} F_{2k} - \sum_{k=0}^i D_{n-2k}^{2i-2k} \partial_{2k+1} \right). \quad (2.2.7)$$

*Beweis.* Wir beweisen zuerst Gleichung (2.2.7) durch Induktion über  $i$ . Der Induktionsanfang  $i = 0$  ergibt sich direkt aus Satz 2.2.1. Für den Induktionsschritt betrachte

$$\begin{aligned} 2F_{2i+1} &\stackrel{\text{Satz 2.2.1}}{=} \sum_{k=0}^{2i} (-1)^k \binom{n-k}{2i+1-k} F_k - \partial_{2i+1} \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{n-2k}{2i+1-2k} F_{2k} - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n-(2k+1)}{2i-2k} F_{2k+1} - \partial_{2i+1} \\ &\stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} \sum_{k=0}^i \binom{n-2k}{2i+1-2k} F_{2k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n-(2k+1)}{2i-2k} \\ &\quad \cdot \left( \sum_{j=0}^k T_{n-2j}^{2k+1-2j} F_{2j} - \sum_{j=0}^k D_{n-2j}^{2(k-j)} \partial_{2j+1} \right) - \partial_{2i+1} \\ &\stackrel{(*)}{=} (n-2i)F_{2i} + \sum_{j=0}^{i-1} \left( \binom{n-2j}{2(i-j)+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{(i-j)-1} \binom{n-2j-(2k+1)}{2(i-j)-2k} T_{n-2j}^{2k+1} \right) F_{2j} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{(i-j)-1} \binom{n-2j-(2k+1)}{2(i-j)-2k} D_{n-2j}^{2k} \partial_{2j+1} - \partial_{2i+1} \\ &\stackrel{(2.2.5)}{=} \sum_{j=0}^i T_{n-2j}^{2i+1-2j} F_{2j} - \sum_{j=0}^i D_{n-2j}^{2i-2j} \partial_{2j+1}. \end{aligned}$$

Dabei wurde bei (\*) benutzt, dass

$$\sum_{k=0}^{i-1} \sum_{j=0}^k a(i, j, k) = \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=j}^{i-1} a(i, j, k) = \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{i-j-1} a(i, j, k+j)$$

für beliebige  $a : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.

Setzt man die Voraussetzung  $F_{2i+1} = 0$  für  $i > \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor$  ein, folgt auch der Rest der Behauptung.  $\square$

Wir wollen diese Gleichungen nun näher untersuchen:

**Lemma 2.2.3**

Für die oben definierten Koeffizienten  $T_n^{2k+1}$  und  $D_n^{2k}$  gilt

$$T_{n+1}^{2k+1} = \frac{n+1}{n-2k} T_n^{2k+1} \quad \text{für } n > 2k+1 \quad \text{und} \quad (2.2.8)$$

$$D_{n+1}^{2k} = \frac{n}{n-2k} D_n^{2k} \quad \text{für } n > 2k. \quad (2.2.9)$$

*Beweis.* Wir beweisen die Behauptungen durch Induktion über  $k$ . Für  $k = 0$  muss  $T_{n+1}^1 = \frac{n+1}{n} T_n^1$  gelten, was nach Definition wahr ist. Für  $k > 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{n+1}^{2k+1} &\stackrel{(2.2.5)}{=} \binom{n+1}{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+1-(2i+1)}{2(k-i)} T_{n+1}^{2i+1} \\ &\stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} \binom{n+1}{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-(2i+1)}{2(k-i)} \frac{(n-2i)(n+1)}{(n-2k)(n-2i)} T_n^{2i+1} \\ &= \frac{n+1}{n-2k} \left( \binom{n}{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-(2i+1)}{2(k-i)} T_n^{2i+1} \right) \\ &\stackrel{(2.2.5)}{=} \frac{n+1}{n-2k} T_n^{2k+1}. \end{aligned}$$

Für die  $D_n^{2k}$  betrachten wir zuerst den Induktionsanfang für  $k = 0$ . Dort gilt  $D_{n+1}^0 = 1 = 1 \cdot D_n^0$ . Der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$\begin{aligned} D_{n+1}^{2k} &\stackrel{(2.2.6)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+1-(2i+1)}{2(k-i)} D_{n+1}^{2i} \\ &\stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-(2i+1)}{2(k-i)} \frac{(n-2i)n}{(n-2k)(n-2i)} D_n^{2i} \\ &\stackrel{(2.2.6)}{=} \frac{n}{n-2k} D_n^{2k}. \end{aligned}$$

$\square$

## 2. $F$ - und $H$ -Vektoren spezieller triangulierter Bälle

Wir setzen nun

$$t(n) := T_{2n+2}^{2n+1} \quad \text{und} \quad d(n) := D_{2n+2}^{2n}$$

und erhalten so induktiv aus (2.2.8) und (2.2.9) die Formeln

$$T_n^{2k+1} = \prod_{i=0}^{n-(2k+3)} \frac{n-i}{n-(2k+1)-i} t(k) = \frac{1}{2k+2} \binom{n}{2k+1} t(k) \quad \text{und} \quad (2.2.10)$$

$$D_n^{2k} = \prod_{i=1}^{n-(2k+2)} \frac{n-i}{n-2k-i} d(k) = \frac{1}{2k+1} \binom{n-1}{2k} d(k). \quad (2.2.11)$$

Wir müssen also nur noch die Folgen  $t(n)$  und  $d(n)$  betrachten:

### Satz 2.2.4

Es gelten die Rekursionsformeln

$$t(0) = 2, \quad t(n) = 2n + 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+2}{2i+2} t(i) \quad \text{und} \quad (2.2.12)$$

$$d(0) = 1, \quad d(n) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2i+1} d(i). \quad (2.2.13)$$

*Beweis.* Für  $t(n)$  rechnen wir  $t(0) = T_2^1 = 2$  und

$$\begin{aligned} t(n) &= T_{2n+2}^{2n+1} \stackrel{(2.2.5)}{=} 2n + 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (2(n-i) + 1) T_{2n+2}^{2i+1} \\ &\stackrel{(2.2.10)}{=} 2n + 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2(n-i) + 1}{2i+2} \binom{2n+2}{2i+1} t(i) \\ &= 2n + 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+2}{2i+2} t(i). \end{aligned}$$

Für  $d(n)$  ergibt sich analog  $d(0) = D_2^0 = 1$  und

$$\begin{aligned} d(n) &= D_{2n+2}^{2n} \stackrel{(2.2.6)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (2(n-i) + 1) D_{2n+2}^{2i} \\ &\stackrel{(2.2.11)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2(n-i) + 1}{2i+1} \binom{2n+1}{2i} d(i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2i+1} d(i). \end{aligned}$$

□

Mit diesen Formeln können wir nun den angekündigten Zusammenhang mit den Genocchi-Zahlen beweisen:

**Satz 2.2.5**

Mit den in Anhang A definierten Genocchi-Zahlen  $G_i$  gilt

$$t(n) = -2 \cdot G_{2(n+1)} \quad \text{und} \quad (2.2.14)$$

$$d(n) = -\frac{2n+1}{n+1} G_{2(n+1)}. \quad (2.2.15)$$

*Beweis.* Um die Behauptung für die  $t(n)$  einzusehen, dividieren wir (2.2.12) durch  $-2$  und erhalten

$$\frac{t(n)}{-2} = -(n+1) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+2}{2i+2} \frac{t(i)}{-2} = -(n+1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \binom{2n+2}{2i} \frac{t(i-1)}{-2},$$

was im Vergleich mit Satz A.1.1(i) das gewünschte Ergebnis liefert.

Die zweite Behauptung beweisen wir durch Induktion über  $n$ . Für  $n=0$  gilt  $d(0) = -G_2 = 1$  und für  $n > 0$  bekommen wir

$$\begin{aligned} d(n) &\stackrel{(2.2.13)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2i+1} d(i) \stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2i+1} \frac{2i+1}{i+1} G_{2(i+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \binom{2n+1}{2i-1} \frac{2i-1}{i} G_{2i} \\ &= -\frac{2n+1}{n+1} \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \binom{2n+2}{2i} \underbrace{\frac{2i-1}{2n+1}}_{1 - \frac{2(n+1-i)}{2n+1}} G_{2i} \right) \\ &\stackrel{\text{Satz A.1.1(i)}}{=} -\frac{2n+1}{n+1} \left( G_{2(n+1)} + (n+1) + (n+1) \sum_{i=1}^n \binom{2n}{2i-1} \frac{G_{2i}}{2i} \right) \\ &\stackrel{\text{Satz A.1.1(ii)}}{=} -\frac{2n+1}{n+1} (G_{2(n+1)} + (n+1) + (n+1)(G_{2n} - 1 - G_{2n})) \\ &= -\frac{2n+1}{n+1} G_{2(n+1)}. \end{aligned}$$

□

Man kann die Gleichungen aus Satz 2.2.2 also in der Form

$$T'_n \tilde{F} = D_n \partial + h'_n \quad (2.2.16)$$

schreiben, mit

$$T'_n \in M \left( \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \right), D_n \in M \left( \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right), \tilde{F} \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1}, \partial \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, h'_n \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor}$$

## 2. $F$ - und $H$ -Vektoren spezieller triangulierter Bälle

und den Definitionen

$$\begin{aligned}
 T_n'(i, j) &= \begin{cases} T_{n-2(j-1)}^{n-2(i+j)+3} = -\frac{2}{2i-1} \binom{n-2(j-1)}{2(i-1)} G_{n-2(i+j)+4}; & n \text{ gerade} \\ T_{n-2(j-1)}^{n-2(i+j)+2} = -\frac{1}{i} \binom{n-2(j-1)}{2i-1} G_{n-2(i+j)+3}; & n \text{ ungerade} \end{cases}, \\
 \tilde{F}(i) &:= F_{2i}, \\
 D_n(i, j) &:= \begin{cases} D_{n-2(j-1)}^{n-2(i+j)+2} = -\frac{1}{\frac{n}{2}-i-j+2} \binom{n-(2j-1)}{2i-1} G_{n-2(i+j)+4}; & n \text{ gerade} \\ D_{n-2(j-1)}^{n-2(i+j)+1} = -\frac{1}{\frac{n-1}{2}-i-j+2} \binom{n-(2j-1)}{2i} G_{n-2(i+j)+3}; & n \text{ ungerade} \end{cases}, \\
 \partial(i) &:= \partial_{2i+1} \quad \text{und} \\
 h_n'(i) &:= \begin{cases} 2F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}; & n \equiv_4 2, 3 \text{ und } i = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

(Dabei haben wir  $G_n := 0$  gesetzt für  $n < 0$ .) Für den Fall  $n \equiv_4 0$  hat (2.2.16) konkret die Form (nach Division durch  $-2$ )

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} G_n & G_{n-2} & \dots & G_{\frac{n}{2}} \\ \frac{1}{3} \binom{n}{2} G_{n-2} & \frac{1}{3} \binom{n-2}{2} G_{n-4} & \dots & \frac{1}{3} \binom{\frac{n}{2}}{2} G_{\frac{n}{2}-2} \\ \frac{1}{5} \binom{n}{4} G_{n-4} & \frac{1}{5} \binom{n-2}{4} G_{n-6} & \dots & \frac{1}{5} \binom{\frac{n}{2}}{4} G_{\frac{n}{2}-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}-2}{2} G_{\frac{n}{2}+2} & \frac{1}{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}-2}{2} G_{\frac{n}{2}} & \dots & \frac{n}{4} G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} G_n & \frac{n-3}{n-2} G_{n-2} & \dots & \frac{3}{4} G_4 & \frac{1}{2} G_2 \\ \frac{1}{n-2} \binom{n-1}{3} G_{n-2} & \frac{1}{n-4} \binom{n-3}{3} G_{n-4} & \dots & \frac{1}{2} G_2 & 0 \\ \frac{1}{n-4} \binom{n-1}{5} G_{n-4} & \frac{1}{n-6} \binom{n-3}{5} G_{n-6} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\frac{n}{2}+2} \binom{n-1}{\frac{n}{2}-1} G_{\frac{n}{2}+2} & \frac{1}{\frac{n}{2}} \binom{n-3}{\frac{n}{2}-1} G_{\frac{n}{2}} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \\ \vdots \\ \partial_{n-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aus den Bemerkungen am Anfang dieses Abschnitts können wir schließen, dass die Gleichung (2.2.16) eine eindeutige Lösung für  $\tilde{F}$  besitzen muss, wenn  $\partial$  und  $F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  vorgegeben sind. Damit ist die unten definierte Matrix  $T_n$  invertierbar, und wir können mit Hilfe des folgenden Satzes und Gleichung (2.2.7) den  $F$ -Vektor von  $B$  berechnen, wenn wir  $F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  und den  $F$ -Vektor für jede Seite von  $B$  kennen:

### Korollar 2.2.6

Es gilt

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{2\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \end{pmatrix} = T_n^{-1} D_n \partial + h_n, \quad (2.2.17)$$

wobei

$$T_n \in M \left( \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor \right), h_n \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor}$$

und

$$\begin{aligned} (T_n | h_n'') &:= T_n', & h_n &:= -T_n^{-1} F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} h_n'' && (\text{falls } n \equiv_4 0, 1) \text{ und} \\ T_n &:= T_n', & h_n &:= h_n' && (\text{sonst}). \end{aligned}$$

Beweis. Ergibt sich direkt aus (2.2.16).  $\square$

**Beispiel 2.2.7** (i) Wir berechnen

$$\begin{aligned} T_4' &= (-2, 2), & D_4 &= \left(-\frac{3}{2}, 1\right), \\ T_5' &= (-5, 3), & D_5 &= (-3, 1), \\ T_6' &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}, & D_6 &= \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{und} \\ T_7' &= \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ -\frac{35}{2} & 5 \end{pmatrix}, & D_7 &= \begin{pmatrix} 15 & -3 & 1 \\ -\frac{15}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Korollar 2.2.6 können wir dann mit

$$F_0 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right) 2F_2 = \frac{3}{4} \partial_1 - \frac{1}{2} \partial_3 + F_2, \quad (n=4)$$

$$F_0 = -\frac{1}{5} (-3, 1) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \end{pmatrix} + 3F_2 = \frac{3}{5} \partial_1 - \frac{1}{5} \partial_3 + 3F_2, \quad (n=5)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \\ \partial_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2F_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 5 & -\frac{9}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \\ \partial_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2F_3 \end{pmatrix} && \text{und} && (n=6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -3 & 1 \\ -\frac{15}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \\ \partial_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2F_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 6 & -\frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_3 \\ \partial_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2F_3 \end{pmatrix} && (n=7) \end{aligned}$$

$F_0$  beziehungsweise  $F_0$  und  $F_2$  berechnen. Aus (2.2.7) ergibt sich dann auch  $F_1$ .

- (ii) Wir greifen Beispiel 2.1.5 wieder auf. Es gilt dann  $(\partial_1, \partial_3) = (8, 6)$  und  $F_2 = 1$ . Mit (i) bekommen wir dann tatsächlich  $F_0 = 6 - 3 + 1 = 4$  und mit (2.2.7)  $F_1 = \frac{1}{2}(4F_0 - \partial_1) = 8 - 4 = 4$ .

### 2.3. Bemerkungen

Der dargestellte Einfluss der Triangulierung des Randes eines triangulierten Balles  $B$  auf die Triangulierung im Inneren ist besonders dann interessant, wenn  $B$  die Triangulierung eines simplizialen Polytops ist. In diesem Fall kann man Korollar 2.1.4 folgendermaßen formulieren (wobei der erste Teil in dieser Version trivial ist):

**Satz 2.3.1**

Sei  $P$  ein  $d$ -dimensionales simpliziales Polytop und  $\Delta$  eine Triangulierung von  $P$ , sodass alle inneren Simplexe mindestens Dimension  $k$  haben. Dann gilt

$$h_i(\Delta) = g_i(P) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{i-j} f_{j-1}(P) \quad \text{für } i \leq k \quad \text{und}$$

$$h_i(\Delta) = 0 \quad \text{für } i \geq d + 1 - k.$$

Die Voraussetzung von Satz 2.3.1 beziehungsweise Korollar 2.1.4 ist insbesondere dann erfüllt, wenn  $B$  ein  $k$ -nachbarschaftliches Polytop ist. Ein Polytop heißt  $k$ -nachbarschaftlich, wenn die konvexe Hülle von je  $k$  oder weniger Ecken schon eine Seite ist. Insbesondere sind dann jeweils  $k$  Punkte in einer Seite enthalten und kein aus diesen Punkten gebildeter  $(k - 1)$ -Simplex kann im Inneren liegen.

Wenn man über ein spezielles  $d$ -dimensionales simpliziales Polytop  $P$  weiß, dass schon jede Menge von  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  Ecken in einer Seite liegt, haben alle Triangulierungen von  $P$  nach dem obigem Satz den gleichen  $h$ - und  $f$ -Vektor. Dies folgt auch aus [McM04, Theorem 3.3], wo die stärkere Aussage bewiesen wird, dass ein simpliziales  $d$ -dimensionales Polytop maximal eine Triangulierung haben kann, die keine inneren Seiten von Dimension kleiner oder gleich  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  enthält. Eine solche Triangulierung wird dort „small-face-free“ genannt. Speziell gilt dies für nachbarschaftliche\* Polytope gerader Dimension. Da solche Polytope außerdem simplizial sind [Grü03, Theorem 7.4.3] und ihr  $h$ -Vektor bekannt und nur von der Anzahl der Ecken abhängig ist ([Zie95, Lemma 8.26] oder [McM70, Lemma 2]), sind auch  $f$ - und  $h$ -Vektor der Triangulierung schon eindeutig durch  $d$  und  $n$  bestimmt:

**Satz 2.3.2**

Sei  $d$  gerade,  $P$  ein  $d$ -dimensionales nachbarschaftliches Polytop mit  $n$  Ecken und  $\Delta$  eine Triangulierung von  $P$ . Dann gilt

$$h_i(\Delta) = \begin{cases} \binom{n-d-2+i}{i}; & i \leq \frac{d}{2} \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$f_{i-1}(\Delta) = \begin{cases} \sum_{j=0}^i \binom{d-j}{k-j} \binom{n-d-1+k}{k}; & i \leq \frac{d}{2} \\ \sum_{j=0}^{\frac{d}{2}} \binom{d+1-j}{k-j} \binom{n-d-2+i}{i}; & \text{sonst} \end{cases}.$$

---

\*Ein  $d$ -dimensionales Polytop heißt nachbarschaftlich, wenn es  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -nachbarschaftlich ist. Dies ist die größtmögliche nichttriviale Nachbarschaftlichkeit, denn ein  $d$ -dimensionales Polytop, das  $(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)$ -nachbarschaftlich ist, ist schon ein Simplex [Grü03, Theorem 7.1.4].

*Beweis.* Die Behauptung für den  $h$ -Vektor folgt aus Satz 2.3.1 und [Zie95, Lemma 8.26] durch die Rechnung

$$h_i(\Delta) = g_i(P) = h_i(P) - h_{i-1}(P) = \binom{n-d-1+i}{i} - \binom{n-d-1+i-1}{i-1} = \binom{n-d-1+i-1}{i}$$

für  $i \leq \frac{d}{2}$ . Der  $f$ -Vektor ergibt sich dann aus der Beziehung zum  $h$ -Vektor.  $\square$

Für nicht  $(k)$ -nachbarschaftliche Polytope können die Voraussetzungen von Korollar 2.1.4 (beziehungsweise Satz 2.3.1) trotzdem erfüllt sein. Ein Beispiel dafür ist der Hypersimplex  $\Delta(n, 2)$  (siehe Abschnitt 3.1), für den wir in Satz 3.2.7 beweisen werden, dass die Dimension eines inneren Simplex bei jeder Triangulierung mindestens  $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  sein muss. Allgemeiner gilt für den  $k$ -Hypersimplex  $\Delta(n, k)^*$ , dass ein solcher Simplex mindestens Dimension  $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$  haben muss. Für beliebige Polytope stellt sich die folgende Frage:

**Problem 2.3.3**

Gegeben ein Polytop oder eine Klasse von Polytopen. Wie groß ist die Mindestdimension eines inneren Simplex bei einer Triangulierung ohne innere Punkte?

Natürlich kann man die Frage auch umdrehen und weitere Klassen von Polytopen suchen, für die es eine möglichst hohe Mindestdimension gibt.

---

\*Der  $k$ -Hypersimplex  $\Delta(n, k)$  ist definiert als die konvexe Hülle der Menge  $\{\sum_{j=1}^k e_{i_j} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ , wobei  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor bezeichnet.

## 2. $F$ - und $H$ -Vektoren spezieller triangulierter Bälle

### 3. Tight-Spans

Wir betrachten nun endliche metrische Räume auf der Menge  $[n] := \{1, \dots, n\}$ , das heißt Funktionen

$$d : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik} \text{ für alle } i, j, k \in [n],$$

die jeder zweielementigen Teilmenge von  $[n]$  einen Abstand der beiden Elemente zuordnen. In [DHM02] wird eine explizite Darstellung des Tight-Spans eines metrischen Raumes angegeben, welche im Fall eines endlichen Raumes durch den Komplex  $P_d^K$  der kompakten Seiten des Polyeders

$$P_d := \{x \in \mathbb{R}_{>0}^n \mid x_i + x_j \geq d_{ij} \forall i, j \in [n]\}$$

gegeben ist. Wir betrachten hier den  $F$ -Vektor des Tight-Spans einer Metrik  $d$ , wobei  $F_i$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Seiten des Komplexes  $P_d^K$  bezeichnet. (Der  $F$ -Vektor entspricht also dem üblichen  $f$ -Vektor des Komplexes, wir wollen hier jedoch keine Komponente  $F_{-1}$  betrachten.) Durch

$$H_i := \sum_{j=i}^n (-1)^{i-j} \binom{j}{i} F_j$$

definieren wir in Analogie zu (2.0.1) außerdem den  $H$ -Vektor des Tight-Spans.

**Beispiel 3.0.4** Die Metrik  $d$  sei gegeben durch die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{18}{17} & 2 & \frac{20}{19} \\ \frac{18}{17} & 0 & \frac{23}{22} & 2 \\ 2 & \frac{23}{22} & 0 & \frac{28}{27} \\ \frac{20}{19} & 2 & \frac{28}{27} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei an der Position  $(i, j)$  der Matrix der Abstand der Punkte  $i$  und  $j$  steht. Der Tight-Span dieser Metrik ist ein Viereck mit vier zusätzlichen Punkten, die mit den Ecken verbunden sind. Er ist im linken Teil von Abbildung 3.1 dargestellt. Wir lesen  $(8, 8, 1, 0, 0)$  als  $F$ -Vektor ab und berechnen den  $H$ -Vektor zu  $(1, 6, 1, 0, 0)$ .

Wie der Tight-Span im Fall  $n \leq 5$  aussehen kann, wurde schon von Dress in [Dre84] vollständig beschrieben, die dazu dualen regulären Triangulierungen des Hypersimplex  $\Delta(5, 2)$  klassifizierten de Loera, Sturmfels und Thomas in [LST95]. Hier gibt es bis

### 3. Tight-Spans

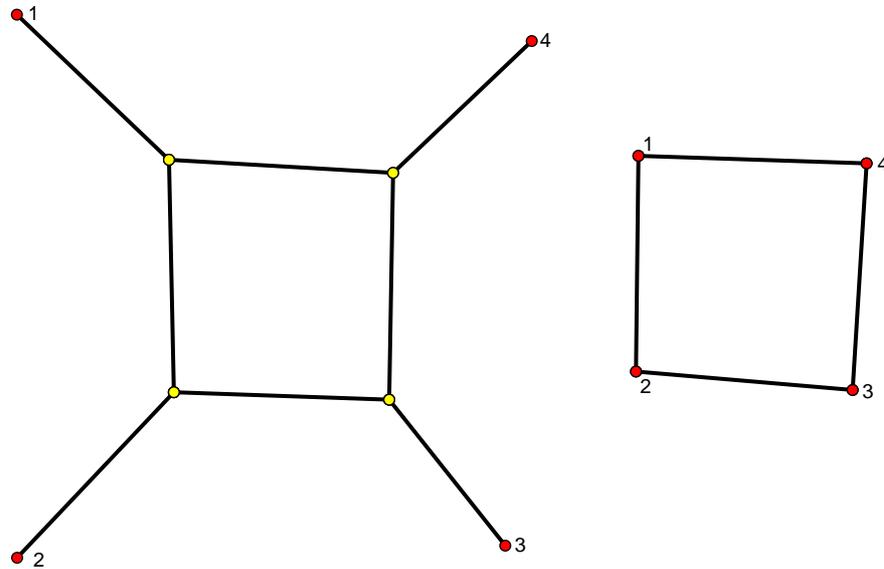


Abbildung 3.1.: Die Tight-Spans der Metriken  $d$  und  $d'$ .

auf Symmetrien drei Möglichkeiten, wobei deren  $F$ -Vektoren übereinstimmen. In [SY04] konnten dann von Sturmfels und Yu alle generischen Metriken auf sechs Punkten klassifiziert werden (339 bis auf kombinatorische Äquivalenz), wobei es hier für den  $F$ -Vektor genau zwei Möglichkeiten gibt. Im allgemeinen Fall zeigte Develin in [Dev04], dass die Dimension des Tight-Spans einer Metrik auf  $n$  Punkten zwischen  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  und  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  liegen muss. Wir werden dieses Ergebnis hier erweitern.

### 3.1. Tight-Spans und Triangulierungen des Hypersimplex

Der Hypersimplex  $\Delta(n, 2) \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert als die konvexe Hülle der Menge  $\{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ . Für die Seiten des Hypersimplex gilt folgendes Lemma:

**Lemma 3.1.1**

Sei  $n \geq 3$ . Der Hypersimplex  $\Delta(n, 2)$  hat  $\binom{n}{i-1} + n\binom{n-1}{i-2}$  Seiten der Dimension  $n - i$  ( $i = 2, \dots, n - 2$ ), davon  $\binom{n}{i-1}$  Hypersimplexe der Art  $\Delta(n - i - 1, 2)$  und  $n\binom{n-1}{i-2}$  Simplexe. Des weiteren hat er  $n\binom{n-1}{n-3}$  Kanten und  $\binom{n}{2}$  Ecken.

Insbesondere hat  $\Delta(n, 2)$  als Facetten (das heißt Seiten der Kodimension 1)  $n$  Simplexe der Dimension  $n - 2$  und  $n$  Hypersimplexe  $\Delta(n - 1, 2)$ .

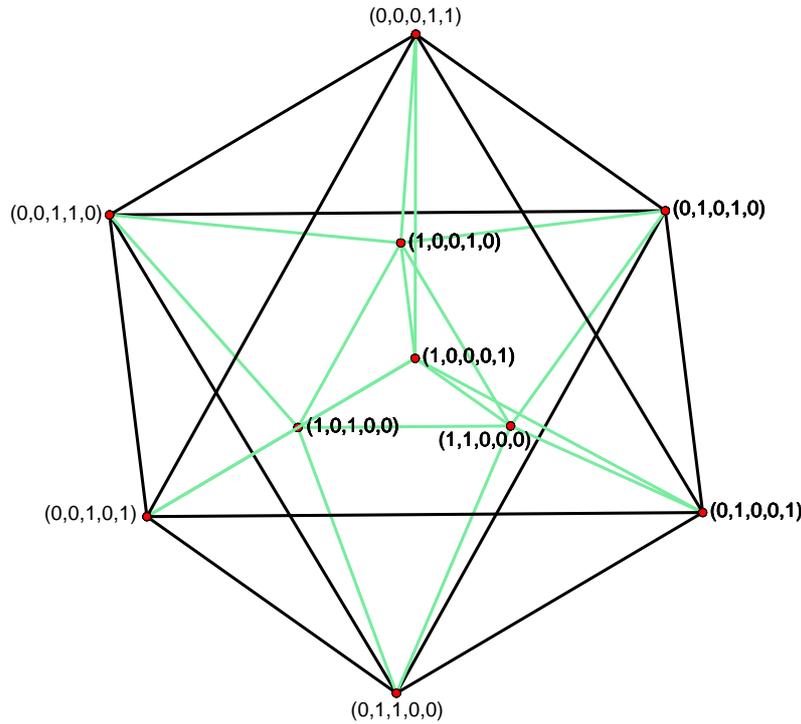


Abbildung 3.2.: Schlegeldiagramm des Hypersimplex  $\Delta(5, 2)$ .

*Beweis.* Die Hyperebenen  $x_i = 0$  und  $x_i = 1$  definieren für  $1 \leq i \leq n$  Facetten des Hypersimplex  $\Delta(n, 2)$ . Wählt man nun  $i - 1$  der  $n$  Gleichungen der Form  $x_i = 0$  aus, erhält man einen Hypersimplex  $\Delta(n - i - 1, 2)$  als eine Seite der Dimension  $n - (i - 1) + 1 = n - i$ . Wählt man andererseits eine Gleichung der Form  $x_i = 1$ , kann man aus den  $n - 1$  Gleichungen der Form  $x_j = 0$  noch  $i - 2$  auswählen, und erhält einen Simplex der Dimension  $n - i$ . Da immer  $\sum x_i = 2$  für die Punkte im Hypersimplex gilt, führt eine Wahl von zwei Gleichungen der Form  $x_i = 1$  schon auf eine der  $\binom{n}{2}$  Ecken.

Gesondert betrachtet werden muss noch der Fall  $i = n - 1$ . Dort treten die Hypersimplexe nicht auf, denn es würden  $n - 1$  Koordinaten identisch 0 sein, was nicht möglich ist.  $\square$

**Beispiel 3.1.2** (i) Der Hypersimplex  $\Delta(3, 2)$  ist ein Dreieck mit drei Kanten und drei Ecken als Seiten, das sagt auch Lemma 3.1.1.

(ii) Der Hypersimplex  $\Delta(4, 2)$  ist der Oktaeder. Nach Lemma 3.1.1 und (i) hat er acht Dreiecke als Facetten, zwölf Kanten und sechs Ecken. Dies kann man auch in Abbildung 2.1 nachzählen.

### 3. Tight-Spans

- (iii) In Abbildung 3.2 ist ein Schlegeldiagramm\* des Hypersimplex  $\Delta(5, 2)$  dargestellt. Als Facetten hat er fünf Oktaeder und fünf Tetraeder, als zweidimensionale Seiten 30 Dreiecke und außerdem 30 Kanten und zehn Ecken, wie man nach Lemma 3.1.1 berechnen und in der Abbildung verifizieren kann.

Die Ecken  $e_i + e_j$  von  $\Delta(n, 2)$  können wir mit den Kanten  $(i, j)$  des vollständigen Graphen  $K_n$  auf  $n$  Punkten identifizieren. Ein Untergraph  $G$  von  $K_n$  entspricht dann dem von diesen Ecken aufgespannten Subpolytop von  $\Delta(n, 2)$ .

Ist nun eine Metrik  $d$  auf  $n$  Punkten gegeben, so kann man eine Unterteilung von  $\Delta(n, 2)$  definieren, indem man einen Untergraphen  $G$  von  $K_n$  genau dann in die Unterteilung aufnimmt, wenn es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$\begin{aligned} x_i + x_j &= d_{ij}, & \text{falls } (i, j) \in G, & \quad \text{und} \\ x_i + x_j &> d_{ij}, & \text{falls } (i, j) \notin G. & \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Diese Unterteilung hat nach Definition keine inneren Ecken. Im Folgenden sollen alle Unterteilungen und Triangulierungen diese Eigenschaft haben.

In [SY04] bemerken Sturmfels und Yu, dass der Komplex der inneren Seiten  $\Delta_d$  dieser Unterteilung polar zum Tight-Span von  $d$  ist. So kann  $\Delta_d$  auch erzeugt werden, indem man das von  $\{(e_i + e_j, d_{ij}) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  erzeugte Polytop  $P \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  auf die erste Komponente projiziert. Eine  $k$ -dimensionale Seite des Tight-Spans entspricht dann einer  $(n - 1 - k)$ -dimensionalen Seite in  $\Delta_d$ .

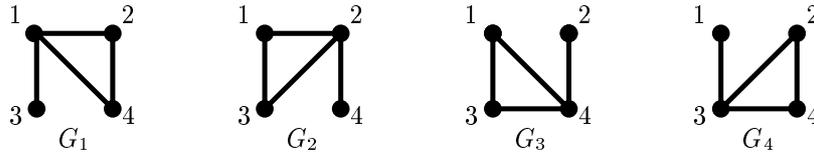


Abbildung 3.3.: Graphen der Triangulierung von  $\Delta(4, 2)$  zur Metrik  $d$ .

**Beispiel 3.1.3** Wir betrachten die Metrik  $d$  aus Beispiel 3.0.4 und die vier in Abbildung 3.3 dargestellten Graphen  $G_1, G_2, G_3$  und  $G_4$ . Definiert man

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{323} \begin{pmatrix} 18 \\ 324 \\ 628 \\ 322 \end{pmatrix}, & x^{(2)} &= \frac{1}{748} \begin{pmatrix} 753 \\ 39 \\ 743 \\ 1457 \end{pmatrix}, & x^{(3)} &= \frac{1}{513} \begin{pmatrix} 517 \\ 1003 \\ 509 \\ 23 \end{pmatrix} \\ \text{und} & & x^{(4)} &= \frac{1}{1188} \begin{pmatrix} 2327 \\ 1193 \\ 49 \\ 1183 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

\*Ein Schlegeldiagramm ist die Projektion eines  $m$ -dimensionalen Polytops auf eine seiner  $(m - 1)$ -dimensionalen Seiten. Siehe dazu beispielsweise [Zie95, Kapitel 5] oder [Grü03, Abschnitt 3.3].

### 3.1. Tight-Spans und Triangulierungen des Hypersimplex

so verifiziert man leicht, dass  $G_i$  die Bedingung (3.1.1) für  $x = x^{(i)}$  erfüllt und kein weiterer Graph dieser genügen kann.

Die Unterteilung von  $\Delta(4, 2)$ , also des Oktaeders, die man erhält, ist somit die in Abbildung 2.1 dargestellte Triangulierung, die in Beispiel 2.1.5 behandelt wurde.

Wir nennen eine Metrik *generisch*, wenn die erzeugte Unterteilung eine Triangulierung ist. In diesem Fall wird  $\Delta(n, 2)$  zu einem durch  $\Delta_d$  triangulierten Ball. Die in Kapitel 2 definierten Vektoren  $F$  und  $H$  sind genau die  $F$ - und  $H$ -Vektoren des Tight-Spans.

Beachtet werden muss allerdings, dass bei dieser Dualisierung die äußeren eindimensionalen Segmente des Tight-Spans verloren gehen. (Im linken Teil von Abbildung 3.1 sind dies beispielsweise die vom Viereck wegführenden Strecken.) Durch Addition geeigneter Konstanten zu kompletten Zeilen und Spalten der Metrik darstellenden Matrix (also durch Übergang von  $d$  zu  $d'$  mit  $d'_{ij} = d_{ij} + \xi_i + \xi_j$  für beliebige  $\xi_i \in \mathbb{R}$ ), was an der durch (3.1.1) definierten Triangulierung nichts ändert, können diese „Tentakeln“ erzeugt und vernichtet werden, ohne den restlichen Tight-Span kombinatorisch zu verändern. Wir können also ohne Einschränkung anstatt mit dem Tight-Span mit der Triangulierung des Hypersimplex arbeiten, müssen jedoch beachten, dass sich die Komponenten  $F_0$  und  $F_1$  des  $F$ -Vektors des Tight-Spans gegenüber dem der Triangulierung noch (simultan) um maximal  $n$  erhöhen können. (Im  $H$ -Vektor verringert sich entsprechend  $H_1$  um  $n$ .)

**Beispiel 3.1.4** Wir betrachten die Metrik  $d'$  auf vier Punkten, die aus der Metrik  $d$  aus Beispiel 3.0.4 durch

$$d'_{ij} = d_{ij} - \xi_i - \xi_j$$

mit  $\xi_1 = \frac{18}{323}$ ,  $\xi_2 = \frac{39}{748}$ ,  $\xi_3 = \frac{49}{1188}$  und  $\xi_4 = \frac{23}{513}$  entsteht.

Der Tight-Span von  $d'$  ist im rechten Teil von Abbildung 3.1 dargestellt. Man sieht sofort, dass die Graphen  $G_i$  aus Beispiel 3.1.3 mit  $x'_i = x_i - \xi_i \mathbf{1}^*$  die Bedingung (3.1.1) erfüllt, und damit  $d$  und  $d'$  dieselbe Triangulierung von  $\Delta(4, 2)$  erzeugen.

Das folgende Lemma gibt Auskunft über den Zusammenhang zwischen den auf den Randhypersimplex induzierten Triangulierungen und den durch Einschränkung entstehenden Metriken:

**Lemma 3.1.5**

Sei  $d : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine Metrik auf  $n$  Punkten,  $\Delta_d$  die entsprechende Triangulierung von  $\Delta(n, 2)$  und  $i \in [n]$ . Dann ist  $\Delta_{d|_{[n]\setminus\{i\}}}$  gleich der Triangulierung  $\Delta_d^i$ , welche von  $\Delta_d$  auf dem durch  $x_i = 0$  definierten Randhypersimplex induziert wird.

*Beweis.* Sei  $G \in \Delta_d^i$  und  $x =: (x', x_i)$  zuerst so gewählt, dass die Bedingung (3.1.1) erfüllt ist. Dann genügt  $x'$  offensichtlich der Bedingung (3.1.1) für  $\Delta_{d|_{[n]\setminus\{i\}}}$ , also gilt  $G \in \Delta_{d|_{[n]\setminus\{i\}}}$ .

---

\*Mit  $\mathbf{1}$  bezeichnen wir den Vektor, der in jeder Komponente den Wert 1 hat.

### 3. Tight-Spans

Sei nun umgekehrt  $G \in \Delta_{d|_{[n]\setminus\{i\}}}$  mit  $x$  entsprechend Bedingung (3.1.1) für  $\Delta_{d|_{[n]\setminus\{i\}}}$ . Wir wählen  $\bar{x}$  groß genug, sodass  $(x, \bar{x})$  die Bedingung (3.1.1) für  $\Delta_d^i$  erfüllt. Also ist wie gewünscht  $G \in \Delta_d^i$ .  $\square$

Somit können wir den  $f$ -Vektor der Triangulierung des Randes aus den Einschränkungen der Metrik auf echte Teilmengen von  $[n]$  erhalten:

#### Satz 3.1.6

Sei  $d$  eine Metrik auf  $n$  Punkten. Für den Rand des durch  $\Delta_d$  triangulierten  $\Delta(n, 2)$  gilt

$$f_i(\partial\Delta_d) = \sum_{j=1}^{n-i-1} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=n-j}} f_i(\Delta_{d|_S}) + n\delta_{i,n-2}, \quad (3.1.2)$$

$$g_i(\partial\Delta_d) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=n-k}} \sum_{l=0}^{\min(k,i)} (-1)^{l-k-1} \binom{k}{l} h_{i-l}(\Delta_{d|_S}) + n\delta_{i,n-1} \quad \text{und} \quad (3.1.3)$$

$$f_{n-i-1}(\partial\Delta_d) = \partial_i(\Delta_d) = \sum_{k=1}^i \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=n-k}} F_i(\Delta_{d|_S}) + n \binom{n-1}{i-1}. \quad (3.1.4)$$

Ist  $d$  so beschaffen, dass für jedes  $S \subseteq [n]$  der  $f$ -Vektor  $f^k(\Delta_d)$  (und somit auch der  $h$ -Vektor  $h^k(\Delta_d)$  und der  $F$ -Vektor  $F^k(\Delta_d)$ ) von  $\Delta_{d|_S}$  nur von der Kardinalität  $k$  von  $S$  abhängt, dann gilt

$$f_i(\partial\Delta_d) = \sum_{j=1}^{n-i-1} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} f_i^{n-j}(\Delta_d) + n\delta_{i,n-2}, \quad (3.1.5)$$

$$g_i(\partial\Delta_d) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\min(k,i)} (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} h_{i-l}^{n-k}(\Delta_d) + n\delta_{i,n-1} \quad \text{und} \quad (3.1.6)$$

$$f_{n-i-1}(\partial\Delta_d) = \partial_i(\Delta_d) = \sum_{k=1}^i \binom{n}{k} F_{i-k}^{n-k}(\Delta_{d|_S}) + n \binom{n-1}{i-1}. \quad (3.1.7)$$

*Beweis.* Der Rand des Hypersimplex  $\Delta(n, 2)$  besteht nach Lemma 3.1.1 aus  $n$  Simplex und  $n$  Hypersimplex  $\Delta(n-1, 2)$ . Um nun den  $f$ -Vektor zu berechnen, addieren wir die  $f$ -Vektoren der Hypersimplexe im Rand, die wir nach Lemma 3.1.5 berechnen können. Diese Hypersimplexe  $\Delta(n-1, 2)$  schneiden sich jeweils in einem Hypersimplex  $\Delta(n-2, 2)$ . Dessen Seiten haben wir damit aber doppelt gezählt, deshalb müssen wir seinen den  $f$ -Vektor der auf ihn induzierten Triangulierung wieder abziehen. Wir fahren immer so fort und erhalten die Zahl der Seiten in den Hypersimplex-Facetten. Die  $n$  Simplex-Facetten haben Dimension  $n-2$ , ihr Rand wurde schon gezählt, und so ergibt sich das behauptete Ergebnis für  $f_i(\partial\Delta_d)$ .

### 3.1. Tight-Spans und Triangulierungen des Hypersimplex

Um die Formel für den  $g$ -Vektor zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass

$$\binom{n}{k} = \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} \binom{n-i}{k-l} \quad (3.1.8)$$

gilt, was durch Induktion aus  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  folgt, und berechnen dann

$$\begin{aligned} g_i(\partial\Delta_d) &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(\partial\Delta_d) \\ &\stackrel{(3.1.2)}{=} \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^n (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S|=n-k}} (-1)^{k-1} f_{j-1}(\Delta_{d|_S}) \\ &\stackrel{(3.1.8)}{=} \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S|=n-k}} (-1)^{i-j-k-1} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \binom{n-k-j}{i-l-j} f_{j-1}(\Delta_{d|_S}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S|=n-k}} \sum_{l=0}^k (-1)^{l-k-1} \binom{k}{l} \sum_{j=0}^{i-l} (-1)^{i-l-j} \binom{n-k-j}{i-l-j} f_{j-1}(\Delta_{d|_S}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S|=n-k}} \sum_{l=0}^k (-1)^{l-k-1} \binom{k}{l} h_{i-l}(\Delta_{d|_S}). \end{aligned}$$

Die Änderungen in der Länge der Summationen ergeben sich jeweils dadurch, dass die übrigen Summanden gleich 0 sind.

Wir können die Anzahl der Simplexe der Dimension  $n-i$  im Rand von  $\Delta(n, 2)$  auch berechnen, indem wir alle Randhypersimplexe der Dimension größer oder gleich  $n-i$  und deren innere Simplexe dieser Dimension betrachten. Diese lassen sich wiederum mit Lemma 3.1.5 berechnen. Wir erhalten also  $\sum_{k=1}^i \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S|=n-k}} F_i(\Delta_{d|_S})$  für die Hypersimplexseiten. Die Simplexseiten enthalten alle nur einen inneren Simplex, hier kommen also noch genau  $n \binom{n-1}{i-1}$  Simplexe der Dimension  $i$  hinzu. Damit ist auch die dritte Gleichung bewiesen.

Wenn  $f(\Delta_{d|_S})$  nur von der Kardinalität von  $S$  abhängt, kann man mit Lemma 3.1.1 die Anzahl der Randhypersimplexe einer festen Dimension einsetzen und erhält den zweiten Teil des Satzes.  $\square$

Der Spezialfall tritt insbesondere dann ein, wenn die Metrik homogen ist, also beispielsweise  $d_{ij} = 1$  für alle  $i, j \in [n]$ , aber auch, wenn dies „fast“ der Fall ist, wie bei der Metrik in Abschnitt 4.1.1.

### 3. Tight-Spans

Wenn wir diesen Satz nun mit Korollar 2.1.4 zusammenfügen, erhalten wir:

#### Korollar 3.1.7

Für die aus einer generischen Metrik  $d$  auf  $n$  Punkten resultierende Triangulierung  $\Delta_d$  des Hypersimplex gilt für  $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$

$$H_i(\Delta_d) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=n-k}} \sum_{l=0}^{\min(k,i)} (-1)^{l-k-1} \binom{k}{l} H_{i-l}(\Delta_{d|_S}) + n\delta_{i,n-1}. \quad (3.1.9)$$

Ist  $d$  so beschaffen, dass für jedes  $S \subseteq [n]$  der  $H$ -Vektor  $H^k(\Delta_d)$  von  $\Delta_{d|_S}$  nur von der Kardinalität  $k$  von  $S$  abhängt, dann gilt

$$H_i(\Delta_d) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\min(k,i)} (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} H_{i-l}^{n-k}(\Delta_d) + n\delta_{i,n-2}. \quad (3.1.10)$$

## 3.2. Tight-Spans und lineare Optimierung

Mit Hilfe der obigen Identifikation von Teilpolyedern von  $\Delta(n, 2)$  und Graphen  $G$  mit  $n$  Ecken kann man die Berechnung des Tight-Spans einer Metrik  $d$  auf das Lösen von linearen Optimierungsproblemen zurückführen. Dies wird in [Dev04] beschrieben. Wir werden hier die wichtigsten Resultate angeben und daraus einige nützliche Folgerungen ziehen.

Dafür können wir eine Metrik  $d : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  auf  $n$  Punkten kanonisch mit einem Vektor  $(d_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$  identifizieren. Einen Graphen  $G$  mit  $n$  Ecken identifizieren wir ebenfalls mit einem Vektor  $(G_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$  für den genau dann  $G_{ij} = 1$  gilt, wenn  $i$  und  $j$  mit einer Kante verbunden sind, und sonst  $G_{ij} = 0$ .

Somit können wir die folgenden Resultate formulieren:

#### Satz 3.2.1 (Proposition 2.9 in [Dev04])

Sei  $d$  eine Metrik auf  $n$  Punkten,  $G$  ein Graph mit  $n$  Ecken und  $\omega \in \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $\omega_i = \deg_i(G)$ . Dann gilt genau dann  $G \in \Delta_d$ , wenn das Maximum der Optimierungsaufgabe

$$\max c^T d, \quad \text{so dass} \quad (3.2.11)$$

$$c \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^n c_{ij} = \omega_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \quad (3.2.12)$$

bei  $c = G$  angenommen wird.

Wir nennen einen Graphen, auf den Satz 3.2.1 zutrifft, *optimal* (bezüglich einer Metrik  $d$ ).

**Satz 3.2.2 (Proposition 2.4 in [Dev04])**

Ein optimaler Graph  $G$  entspricht genau dann einem inneren Simplex, wenn  $G$  jede Ecke trifft und nicht isomorph zum bipartiten Graphen  $K_{1,n-1}$  ist.

**Satz 3.2.3 (Proposition 2.10 in [Dev04])**

Eine Metrik  $d$  ist genau dann generisch, wenn kein optimaler Graph  $G$  einen geraden Zyklus enthält.

**Satz 3.2.4 (Proposition 2.7 in [Dev04])**

Für eine generische Metrik  $d$  ist das Optimierungsproblem (3.2.11) für festes  $\omega$  eindeutig lösbar.

**Satz 3.2.5 (Proposition 2.3 in [Dev04])**

Ist  $c$  ein Maximum der Aufgabe (3.2.11), dann ist der Graph  $G$ , der aus allen Kanten  $(i, j)$  mit  $c_{ij} \neq 0$  besteht, optimal.

**Beispiel 3.2.6** Wir betrachten die Metrik  $d$  aus Beispiel 3.0.4 und den Graphen  $G_1$  aus Beispiel 3.1.3. Es ergeben sich die Bedingungen

$$c \geq 0 \text{ und } c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} + c_{i4} = \begin{cases} 3; & i = 1 \\ 2; & i = 2, 4 \\ 1; & i = 3 \end{cases}.$$

Wenn wir  $c^T d$  unter diesen Nebenbedingungen maximieren, erhalten wir  $G_1$  als eindeutige Lösung, wie wir auch aus den Sätzen 3.2.1 und 3.2.4 bekommen. Für  $G_2$ ,  $G_3$  und  $G_4$  funktioniert das analog. Wenn wir  $d$  durch  $d'$  aus Beispiel 3.1.4 ersetzen, bekommen wir dasselbe Ergebnis.

Die vier Graphen  $G_i$  sind alle aufspannend und nicht isomorph zu  $K_{1,3}$ , außerdem haben sie keine geraden Zyklen (vergleiche die Sätze 3.2.2 und 3.2.3).

Mit Hilfe dieser Resultate bekommen wir nun als erstes eine Schranke für die Anzahl der inneren Simplexe minimaler Dimension:

**Satz 3.2.7**

In einer Triangulierung von  $\Delta(n, 2)$  gibt es, wenn  $n$  gerade ist, maximal einen inneren Simplex der Dimension  $\frac{n}{2} - 1$ , wenn  $n$  ungerade ist, maximal  $n$  innere Simplexe der Dimension  $\frac{n-1}{2}$ . Simplexe niedrigerer Dimension können im Inneren nicht vorkommen.

*Beweis.* Dass es keine inneren Simplexe niedrigerer Dimension geben kann, folgt sofort daraus, dass ein aufspannender Teilgraph von  $K_n$  mindestens  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  Kanten enthalten muss.

Für die Behauptung über die Anzahl sei zunächst  $n$  gerade und  $G$  ein Simplex in  $\Delta_d$  mit  $\frac{n}{2}$  Kanten. Nach Satz 3.2.1 müsste  $G$  die Aufgabe (3.2.11) für  $\omega = (1)_{1 \leq i \leq n}$  lösen. Nach Satz 3.2.4 kann es dafür aber bei generischem  $d$  nur ein  $G$  geben. Das zeigt die Behauptung für gerade  $n$ .

### 3. Tight-Spans

Ist  $n$  ungerade, so haben wir einen Graphen mit  $n$  Ecken und  $\frac{n+1}{2}$  Kanten. Somit gibt es genau eine Ecke mit Grad 2, während alle anderen Ecken Grad 1 haben. Also gibt es  $n$  Möglichkeiten  $\omega$  zu wählen und entsprechend (wiederum mit Satz 3.2.4) maximal  $n$  verschiedene Simplexe.  $\square$

**Beispiel 3.2.8** Der Oktaeder  $\Delta(4, 2)$  hat in jeder Triangulierung genau eine innere Seite der Dimension  $\frac{n}{2} - 1 = 1$ , also genau eine innere Kante (vergleiche Beispiel 2.1.5).

Um von einem konkreten Simplex  $G$  zu beweisen, dass er tatsächlich in  $\Delta_d$  liegt, ist folgender Satz hilfreich:

**Satz 3.2.9**

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph auf  $n$  Punkten mit  $n$  Kanten und ohne gerade Zyklen. Dann ist  $G$  genau dann optimal bezüglich einer generischen Metrik  $d : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , wenn für alle  $(j, l) \notin G$  gilt

$$d_{jl} \leq \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} d_{i_k, i_{k+1}}, \quad (3.2.13)$$

wobei  $(j = i_1, i_2, \dots, i_m = l)$  der eindeutig bestimmte Weg  $W$  ungerader Länge vom Knoten  $j$  zum Knoten  $l$  in  $G$  ist.

*Beweis.* Sei zunächst  $G$  optimal und (3.2.13) für eine Kante  $(j, l) \notin G$  nicht erfüllt. Wir betrachten den aus den Kanten von  $W$  und der Kante  $(j, l)$  bestehenden Graphen  $C$ , der ein gerader Zyklus ist. Wir definieren einen Vektor  $c' \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$  durch

$$c'_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1; & (\alpha, \beta) = (i_k, i_{k+1}) \in C \text{ und } k \text{ ungerade} \\ -1; & (\alpha, \beta) = (i_k, i_{k+1}) \in C \text{ und } k \text{ gerade} \\ 1; & (\alpha, \beta) = (j, l) \in C \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.2.14)$$

Dann erfüllt  $c := G + \frac{1}{2}c'$  die Bedingung (3.2.12) und es gilt

$$c^T d = G^T d + \frac{1}{2} \left( - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} d_{i_k, i_{k+1}} + d_{jl} \right) > G^T d,$$

im Widerspruch zu Satz 3.2.1.

Sei nun umgekehrt (3.2.13) für alle  $(j, l) \notin G$  erfüllt und  $G$  nicht optimal. Da  $\omega \geq 0$  ist, ist das durch (3.2.12) definierte Polytop beschränkt und es gibt ein (nach Satz 3.2.4 eindeutiges) Maximum  $c$  der Aufgabe (3.2.11). Da  $c \neq G$  ist, gibt es nach Satz 3.2.5 ein Paar  $(j, l) \notin G$  mit  $c_{jl} > 0$ . Wir bilden dann  $e = c - \frac{c_{jl}}{2}c'$  mit  $c'$  nach (3.2.14) und  $C$  wie im ersten Teil des Beweises. Dann gilt

$$e^T d = c^T d + \frac{c_{jl}}{2} \left( \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} d_{i_k, i_{k+1}} - d_{jl} \right) \geq 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da  $c$  eindeutiges Optimum ist.  $\square$

**Beispiel 3.2.10** Wie in Beispiel 3.2.6 betrachten wir die Metriken  $d$  und  $d'$  und den Graphen  $G_1$  aus Abbildung 3.3. Nach Satz 3.2.9 muss dann

$$d_{34} \leq d_{31} - d_{12} + d_{24} \quad \text{und} \quad d_{23} \leq d_{24} - d_{41} + d_{13}$$

gelten, was man durch Einsetzen sofort verifiziert.

Wir zeigen nun noch ein Lemma, das hilfreich sein wird, wenn wir konkret eine Mindestanzahl von Simplexen maximaler Dimension finden wollen:

**Lemma 3.2.11**

Sei  $\omega = (B, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c$  optimal bezüglich  $\omega$  und  $G$  bestehe aus allen Kanten  $(i, j)$  mit  $c_{ij} \neq 0$ . Dann trifft für die Zusammenhangskomponente  $C$  von  $G$ , in der die Ecke 1 enthalten ist, genau eine der folgenden Möglichkeiten zu:

- (i)  $G$  besteht aus einem ungeraden Zyklus und zusätzlich  $B - 1$  Kanten von der Ecke 1 zu einer anderen, von der keine weiteren Kanten ausgehen.
- (ii)  $G$  besteht aus  $B$  Kanten, die von der Ecke 1 ausgehen.

Alle anderen Zusammenhangskomponenten sind isolierte Kanten oder ungerade Zyklen.

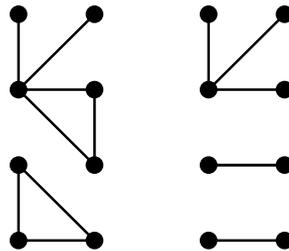


Abbildung 3.4.: Optimale Graphen für  $B = 3$  nach Lemma 3.2.11.

*Beweis.* Geht von einer Ecke  $i \neq 1$  von  $G$  nur eine Kante  $(i, j)$  aus, dann gilt sicherlich  $c_{ij} = 1$ . Wegen  $\sum_{k=1}^n c_{jk} = 1$  kann, falls  $j \neq 1$ , dann auch  $j$  nur mit einer anderen Ecke verbunden sein. Da  $G$  nach Satz 3.2.5 optimal ist, enthält er nach Satz 3.2.3 keine geraden Zyklen und somit sind alle Zusammenhangskomponenten, in denen die Ecke 1 nicht enthalten ist, isolierte Kanten und ungerade Zyklen.

Aus der obigen Argumentation ergibt sich auch, dass in der Zusammenhangskomponente der Ecke 1 nur dann eine Kante zwischen zwei von 1 verschiedenen Ecken vorkommen kann, wenn diese Bestandteil eines ungeraden Zyklus sind. Das heißt, es gibt maximal einen ungeraden Zyklus und außerdem Kanten zur Ecke 1. Aus der Beobachtung, dass im ungeraden Zyklus jede Kante das Gewicht  $\frac{1}{2}$  und wie oben alle anderen Kanten das Gewicht 1 haben müssen, ergibt sich die Behauptung.  $\square$

### 3.3. Ein Algorithmus zur Berechnung des $F$ -Vektors

Man kann Satz 3.2.1 auch dazu verwenden, zu einer vorgegebenen generischen Metrik auf  $n$  Punkten die entsprechende Triangulierung des Hypersimplex zu berechnen. Im Prinzip muss nur für alle aufspannenden Teilgraphen von  $K_n$  getestet werden, ob sie den Bedingungen des Satzes genügen. Natürlich ist das sehr aufwendig, der Aufwand kann aber stark reduziert werden, wenn man die Triangulierung schrittweise konstruiert. Wir werden im Folgenden einen Algorithmus dazu skizzieren:

Zuerst wählt man  $S$ , einen der  $(n-2)$ -dimensionalen Simplexe im Rand von  $\Delta(n, 2)$ . Zu diesem gibt es dann offensichtlich genau eine weitere Ecke  $x$  von  $\Delta(n, 2)$ , sodass der von  $x$  und  $S$  zusammen aufgespannte  $(n-1)$ -dimensionale Simplex  $\sigma$  optimal ist. Um herauszufinden welcher das ist, benutzen wir dann Satz 3.2.1. Nun wählen wir als neuen Simplex  $S$  eine im Inneren von  $\Delta(n, 2)$  gelegene Facette von  $\sigma$ . Es gibt nun genau einen weiteren Simplex der Triangulierung, in dem  $S$  enthalten ist, welchen wir wieder mit Satz 3.2.1 bestimmen. Wir fahren fort, indem wir als  $S$  immer eine Facette eines schon in der Triangulierung enthaltenen  $(n-1)$ -Simplexes wählen, die weder im Rand liegt, noch in einem weiteren schon vorhandenen Simplex. Finden wir keine solche mehr, haben wir die komplette Triangulierung von  $\Delta(n, 2)$  gefunden.

Wir können diesen Algorithmus nun noch verbessern, indem wir das Lösen des Optimierungsproblems stark vereinfachen. Dabei nutzen wir die Tatsache aus, dass wir schon eine mögliche Lösung vorgegeben haben, und außerdem die spezielle Struktur des Optimierungsproblems kennen.

Zunächst beweisen wir dafür ein Lemma, das uns sagt, wann ein vorgegebener Vektor ein Optimierungsproblem löst. Dieselbe Technik wird auch im bekannten Simplex-Algorithmus verwendet.

#### Lemma 3.3.1

Sei  $n \leq m$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit vollem Rang,  $B \subseteq [m]$  so gewählt, dass  $A_B^*$  invertierbar ist, und  $N = [m] \setminus B$ .

Dann ist der Vektor  $c$  mit  $c_B = A_B^{-1}\omega > 0$  und  $c_N = 0$  genau dann eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \max c^T d, \quad \text{sodass} \\ c \geq 0 \text{ und } Ac = \omega, \end{aligned}$$

wenn

$$d_N^T \leq d_B^T A_B^{-1} A_N \tag{3.3.15}$$

gilt.

---

\*Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $S \subseteq [m]$  bezeichnen wir mit  $A_S$  diejenige Teilmatrix von  $A$ , deren Spaltennummern den Elementen von  $S$  entsprechen. Entsprechend bezeichnen wir für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^m$  mit  $x_S$  den Vektor, der aus allen Komponenten  $x_i$  mit  $i \in S$  besteht.

### 3.3. Ein Algorithmus zur Berechnung des $F$ -Vektors

Beweis. Sei  $Ac = \omega$ . Dann gilt

$$A_B c_B + A_N c_N = \omega \quad \Leftrightarrow \quad c_B = A_B^{-1}(\omega - A_N c_N). \quad (3.3.16)$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} d^T c &= d_B^T c_B + d_N^T c_N = d_B^T (A_B^{-1}(\omega - A_N c_N)) + d_N^T c_N \\ &= d_B^T A_B^{-1} \omega + (d_N^T - d_B^T A_B^{-1} A_N) c_N. \end{aligned}$$

Da der erste Summand von  $c$  unabhängig ist, muss also der zweite Summand maximiert werden. Ist nun  $d_N^T \leq d_B^T A_B^{-1} A_N$ , so wird, wegen  $c \geq 0$ , dieser Summand negativ oder gleich 0. Der Wert ist also maximal, wenn  $c_N = 0$  gewählt wird,  $c_B$  ergibt sich dann mit (3.3.16) entsprechend. Damit ist die Rückrichtung bewiesen.

Ist andererseits eine Komponente von  $d_N^T - d_B^T A_B^{-1} A_N$  größer als 0, so erhält man, wenn man diese Komponente gleich einem  $\varepsilon$  größer als 0 wählt, einen größeren Wert. Wegen der Stetigkeit der Berechnung von  $c_B$  mit (3.3.16) können wir  $\varepsilon$  so klein wählen, dass auch noch  $c_B > 0$  gilt. Der Vektor  $c$  mit  $c_N = 0$  kann also nicht optimal sein.  $\square$

Somit muss statt der Lösung des Optimierungsproblems nur noch die Bedingung (3.3.15) getestet werden. Ein Problem dabei ist noch die notwendige Inversion der Matrix  $A_B$ . Wir betrachten dafür (3.2.12) und stellen fest, dass in unserem Fall die Spalten der Matrix  $A$  alle möglichen  $n$ -dimensionalen Vektoren mit genau zwei Einsen und sonst Nullen sind. Wir können also jede dieser Spalten mit einer Kante von  $K_n$  identifizieren. Tatsächlich besteht für einen gegebenen Graphen  $G$  mit  $n$  Kanten, von dem wir testen wollen, ob er optimal ist, die Matrix  $A_B$  aus Lemma 3.3.1 mit dieser Identifikation aus den Kanten von  $G$ . So ist  $A_B$  also die Ecken-Kanten-Inzidenzmatrix von  $G$ , das heißt die Spalten entsprechen den Kanten, die Zeilen den Ecken, und eine Eins an der Stelle  $(i, j)$  gibt an, dass die Ecke  $i$  in der Kante  $j$  liegt. Das Inverse einer solchen Matrix kann man aber leicht explizit angeben:

#### Lemma 3.3.2

- (i) Die Ecken-Kanten-Inzidenzmatrix  $A$  eines Zyklus ungerader Länge  $n$  ist invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} =: B.$$

### 3. Tight-Spans

- (ii) Sei  $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  eine invertierbare Matrix. Dann ist auch die Matrix  $\left( \begin{array}{c|c} A & e_i \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)$  invertierbar und es gilt

$$\left( \begin{array}{c|c} A & e_i \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & -\alpha_i \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right),$$

wobei  $\alpha_i \in \mathbb{R}^{n-1}$  die  $i$ -te Spalte von  $A^{-1}$  bezeichnet.

*Beweis.*

- (i) Wir bezeichnen die  $i$ -te Zeile von  $A$  mit  $a_i \in \mathbb{R}^n$  und die  $i$ -te Spalte von  $B$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ . Entscheidend ist nun die Beobachtung, dass in  $\alpha_i$  genau dann zwei benachbarte Komponenten (Damit meinen wir entweder die  $k$ -te und die  $(k+1)$ -te oder die letzte und die erste.) gleich 1 sind, wenn dies die Komponenten von  $a_i$  sind, die gleich 1 sind. Somit gilt  $a_i^T \alpha_i = 1$ . Andere benachbarte Komponenten in  $\alpha_i$  haben verschiedene Vorzeichen, sodass  $a_i^T \alpha_j = 0$  für  $i \neq j$ . Somit gilt  $B = A^{-1}$ .
- (ii) Nach Definition von  $\alpha_i$  gilt  $A\alpha_i = e_i$ . Wir bezeichnen die  $n \times n$ -Einheitsmatrix mit  $E_n$  und rechnen

$$\left( \begin{array}{c|c} A & e_i \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & -\alpha_i \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} E_{n-1} & -A\alpha_i + e_i \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) = E_n. \quad \square$$

Da nach Satz 3.2.3 ein optimaler Graph  $G$  keine geraden Zyklen enthalten darf, besteht jede Zusammenhangskomponente von  $G$  aus einem ungeraden Zyklus und weiteren Kanten, die sich mit Teil (ii) des Lemmas anhängen lassen. Somit können wir direkt an  $G$  das Inverse unserer Matrix  $A_B$  ablesen.

Wir haben also nun den Test, ob ein Graph  $G$  optimal ist, stark vereinfacht. Eine weitere Vereinfachung kann man noch dadurch erhalten, dass man frühzeitig Graphen aussortiert, die gerade Zyklen enthalten.

Der angegebene Algorithmus berechnet uns nun also zu einer gegebenen generischen Metrik die Simplexe maximaler Dimension der entsprechenden Triangulierung des Hypersimplex. Indem man einfach alle Seiten der Simplexe der Triangulierung sammelt (und doppelte löscht), bekommt man die komplette Triangulierung und kann auch den  $F$ -Vektor des Tight-Spans berechnen.

Man kann den Algorithmus außerdem so modifizieren, dass er auch für nicht generische Metriken funktioniert. Dafür muss man sich zusätzlich diejenigen Komponenten merken, bei denen in (3.3.15) Gleichheit gilt, und die entsprechenden Ecken zum Simplex dazunehmen um ein Polytop der Unterteilung zuzubekommen. Damit bekommt man die zur Metrik gehörende polytopale Unterteilung des Hypersimplex. Eine Berechnung des  $F$ -Vektors ist jedoch in diesem Fall nicht so leicht möglich.

Der Algorithmus wurde vom Autor implementiert und unter anderem zur Berechnung der  $F$ -Vektoren von  $d_{\min}^n$  in Tabelle 4.2 verwendet.

## 4. Obere und untere Schranken für den $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

### 4.1. Obere Schranke

#### Satz 4.1.1

Für den  $F$ - und den  $H$ -Vektor  $F(n)$  und  $H(n)$  des Tight-Spans einer Metrik  $d$  auf  $n$  Punkten gilt

$$H_i(n) \leq \binom{n}{2i} \quad \text{und} \quad F_i(n) \leq 2^{n-2i-1} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}.$$

Für den  $F$ -Vektor gilt außerdem die Rekursion

$$F_i(n) \leq 2F_i(n-1) + F_{i-1}(n-2).$$

$n$	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$
4	8	8	1							
5	16	21	5							
6	32	48	18	1						
7	64	112	56	7						
8	128	256	160	32	1					
9	256	576	432	120	9					
10	512	1280	1120	400	50	1				
11	1024	2816	2816	1232	220	11				
12	2048	6144	6912	3584	840	72	1			
13	4096	13312	16640	9984	2912	364	13			
14	8192	28672	39424	26880	9408	1568	98	1		
15	16384	61440	92160	70400	28800	6048	560	15		
16	32768	131072	212992	180224	84480	21504	2688	128	1	
17	65536	278528	487424	452608	239360	71808	11424	816	17	
18	131072	589824	1105920	1118208	658944	228096	44352	4320	162	1

Tabelle 4.1.:  $F$ -Vektor der Metrik  $d_{\max}^n$  auf  $n$  Punkten und somit obere Schranke.

#### 4. Obere und untere Schranken für den $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

*Beweis.* Wir beweisen zuerst die Schranke für den  $H$ -Vektor. Die Werte beziehen sich auf den Tight-Span, für die entsprechenden Triangulierungen des Hypersimplex möchten wir also für den Maximalfall zeigen, dass  $H_i = \binom{n}{2i} - n\delta_{i,1}$  gilt (vergleiche die Diskussion in Abschnitt 3.1). Dafür benutzen wir die in Abschnitt 2.1 entwickelte Theorie über Triangulierungen, die auf den Hypersimplex  $\Delta(n, 2)$  angewendet werden kann. Die Aussage gilt dann auch für nicht generische Metriken, da beliebige Unterteilungen zu Triangulierungen verfeinert werden können.

Wir beweisen diese Aussage durch Induktion über  $n$ . Für  $n \leq 4$  ist die Behauptung klar, denn dort gibt es (bis auf Symmetrien) genau eine Möglichkeit für eine Triangulierung von  $\Delta(n, 2)$ ; diese erreicht die obere Schranke. (Für  $n = 4$  betrachte dazu Abbildung 2.1.) Für  $n > 4$  betrachten wir zunächst Satz 3.2.7. Dieser sagt uns, dass es in  $\Delta_d$  keine inneren Simplexe der Dimension kleiner  $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  gibt und beweist außerdem die Behauptung für  $i = (n-1) - (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  (denn es gilt  $H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\Delta_d) = F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\Delta_d)$ ). Dies zeigt auch die Behauptung für  $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  und erlaubt uns das Benutzen von Korollar 2.1.4 für  $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Wir nehmen an, dass für unsere Metrik jeder  $F$ -Vektor des Randes maximal ist. Insbesondere sind sie für feste Kardinalität gleich und wir können den zweiten Teil von Korollar 3.1.7 benutzen.

Zuerst zeigen wir die beiden Hilfsbehauptungen

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i-1} (n-k) = \delta_{i,1} \quad \text{und} \quad (4.1.1)$$

$$\sum_{k=l}^n (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{n-k}{2(i-l)} = 0, \quad \text{falls } l \geq i \text{ und } n > 2i. \quad (4.1.2)$$

Für  $i = 0$  ist (4.1.1) trivial und für  $i > 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i-1} (n-k) &= \sum_{k=i-1}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i-1} (n-k) - \delta_{i,1} (-1)^1 \binom{n}{0} \binom{0}{0} n \\ &= i \binom{n}{i} \sum_{k=i-1}^n (-1)^{i-k} \binom{n-i}{k-(i-1)} + \delta_{i,1} n \\ &= -i \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-(i-1)} (-1)^k \binom{n-i}{k} + \delta_{i,1} n \\ &= \delta_{i,1} n. \end{aligned}$$

Dabei wurde bei der letzten Gleichheit die Tatsache

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0,n} \quad (4.1.3)$$

benutzt.

Um (4.1.2) zu beweisen rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^n (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{n-k}{2(i-l)} &= \binom{n}{l} \binom{n-l}{2(i-l)} \sum_{k=l}^n (-1)^{l-k-1} \binom{n-2i+l}{k-l} \\
&= -\binom{n}{l} \binom{n-l}{2(i-l)} \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^k \binom{n-2i+l}{k} \\
&= -\binom{n}{l} \binom{n-l}{2(i-l)} \sum_{k=0}^{n-2i+l} (-1)^k \binom{n-2i+l}{k} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus  $n - 2i + l < n - 2l + l = n - l$  folgt, und die letzte aus (4.1.3) und der Tatsache, dass  $n - 2i + l = 0$  nicht vorkommen kann, da  $n > 2i$ .

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir nun den Induktionsschritt für den  $H$ -Vektor machen:

$$\begin{aligned}
H_i(n) &\stackrel{\text{Kor. 3.1.7}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\min(k,i)} (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} H_{i-l}(n-k) \\
&\stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\min(k,i)} (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{n-k}{2(i-l)} - \sum_{k=1}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i-1} (n-k) \\
&\stackrel{(4.1.1)}{=} \sum_{l=0}^i \sum_{k=l}^n (-1)^{l-k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{n-k}{2(i-l)} - (-1)^{0-1} \binom{n-0}{2(i-0)} - n\delta_{i,1} \\
&\stackrel{(4.1.2)}{=} \binom{n}{2i} - n\delta_{i,1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für den  $H$ -Vektor bewiesen. Da der  $F$ -Vektor genau dann maximal wird, wenn der  $H$ -Vektor maximal ist, rechnen wir den zum maximalen  $H$ -Vektor gehörenden  $F$ -Vektor aus (direkt für den Tight-Span). Wir berechnen zuerst

$$\binom{j}{i} \binom{n}{2j} = \binom{j}{i} \left( \binom{n-1}{2j} + \binom{n-2}{2j-1} + \binom{n-2}{2j-2} \right) \quad (4.1.4)$$

$$= \binom{j}{i} \left( \binom{n-1}{2j} + \binom{n-2}{2j-1} \right) + \left( \binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1} \right) \binom{n-2}{2j-2} \quad (4.1.5)$$

und beweisen dann die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
F_i(n) &= \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} H_i(n) = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} \binom{n}{2j} \\
&\stackrel{(4.1.5)}{=} \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} \left( \binom{n-1}{2j} + \binom{n-2}{2j-1} \right) + \sum_{j=i}^n \left( \binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1} \right) \binom{n-2}{2j-2} \\
&= \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j}{i} \left( \binom{n-1}{2j} + \binom{n-2}{2j-1} \right) + \sum_{j=i-1}^{n-1} \left( \binom{j}{i} + \binom{j}{i-1} \right) \binom{n-2}{2j}
\end{aligned}$$

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j}{i} \left( \binom{n-1}{2j} + \binom{n-2}{2j-1} + \binom{n-2}{2j} \right) + \sum_{j=i-1}^{n-2} \binom{j}{i-1} \binom{n-2}{2j} \\
 &= 2 \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j}{i} H_j(n-1) + \sum_{j=i-1}^{n-2} \binom{j}{i-1} H_{j-1}(n-2) \\
 &= 2F_i(n-1) + F_{i-1}(n-2).
 \end{aligned}$$

Mit Induktion können wir nun auch zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 F_i(n) &= 2F_i(n-1) + F_{i-1}(n-2) \\
 &\stackrel{\text{Ind. V.}}{=} 2^{n-2i-1} \frac{n-1}{n-1-i} \binom{n-1-i}{i} + 2^{n-2i-1} \frac{n-2}{n-1-i} \binom{n-1-i}{i-1} \\
 &= 2^{n-2i-1} \frac{(n-2-i)!}{i!(n-2i)!} \underbrace{\left( (n-1)(n-2i) + (n-2)i \right)}_{=n(n-i-1)} \\
 &= 2^{n-2i-1} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}
 \end{aligned}$$

gilt. Damit ist auch die Schranke für den  $F$ -Vektor bewiesen.  $\square$

Man bekommt also eine sehr einfache obere Schranke für den  $H$ -Vektor, und auch die Schranke für den  $F$ -Vektor kann sehr leicht berechnet werden. In Tabelle 4.1 sind die Schranken für den  $F$ -Vektor bis  $n = 18$  angegeben.

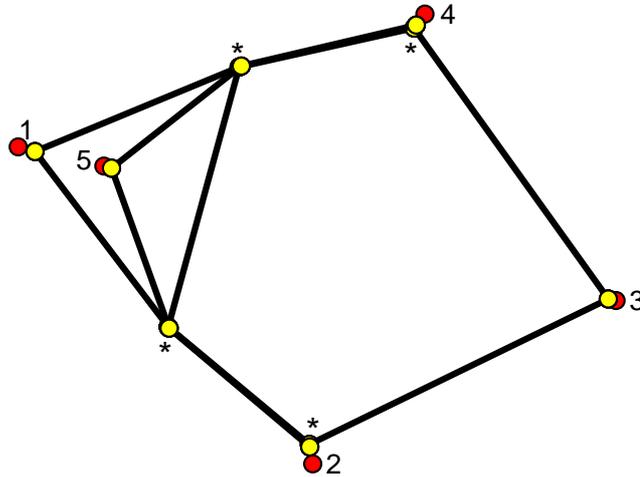


Abbildung 4.1.: Darstellung des Tight-Spans von  $d_{\max}^m$  für  $n = 5$ .

### 4.1.1. Eine Metrik für die obere Schranke

Wir definieren eine Metrik  $d_{\max}^n : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  auf  $n$  Punkten durch

$$d_{\max}^n(i, j) := 1 + \frac{1}{n^2 + in + j}. \quad (4.1.6)$$

In Abbildung 4.2 ist eine kombinatorische Darstellung der Tight-Spans dieser Metrik mit  $n = 5$  und  $n = 6$  zu sehen. Abbildung 4.1 zeigt eine weitere Darstellung von  $d_{\min}^5$ , in der auch die metrischen Eigenschaften berücksichtigt sind (vergleiche dazu auch die Anmerkungen zu den Abbildungen in Kapitel 1). An den mit \* markierten Stellen sind jeweils zwei Punkte des Tight-Spans so nahe beieinander, dass nur einer zu sehen ist.

Die  $F$ -Vektoren von  $d_{\max}^n$  bis  $n = 18$  kann man aus Tabelle 4.1 entnehmen. Wir werden nun zeigen, dass mit  $d_{\max}^n$  die oben bewiesene obere Schranke erreicht wird.

#### Satz 4.1.2

Für alle  $n$  ist  $d_{\max}^n$  generisch.

*Beweis.* Nach Satz 3.2.3 genügt es zu zeigen, dass kein bezüglich  $d_{\max}^n$  optimaler Graph einen geraden Zyklus enthält. Gäbe es einen solchen Graphen  $G$  mit einem Zyklus  $(i_1, i_2, \dots, i_{2n}, i_1)$ , könnten wir  $G$  in die Mengen  $A = \{(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{2n-1}, i_{2n})\}$  und  $B = \{(i_2, i_3), \dots, (i_{2n-2}, i_{2n-1}), (i_{2n}, i_1)\}$  aufteilen. Es müsste dann

$$\sum_{(k,l) \in A} d_{kl} = \sum_{(k,l) \in B} d_{kl} \quad (4.1.7)$$

gelten.

Wäre nämlich eine der beiden Seiten größer als die andere, könnte man durch Erhöhen jedes Summanden der größeren Summe und Verkleinern jedes Summanden der kleineren Summe um ein genügend kleines  $\varepsilon$  ein  $c$  bekommen, das (3.2.12) erfüllt und für das  $c^T d > G^T d$  gilt, was ein Widerspruch zur Optimalität von  $G$  wäre. Die Gleichung (4.1.7) kann aber nicht gelten, da die  $d_{ij}$  linear unabhängig über  $\mathbb{Q}$  sind.  $\square$

Um zu zeigen, dass unsere Metrik  $d_{\max}^n$  tatsächlich die obere Schranke erreicht, beweisen wir zuerst ein Lemma:

#### Lemma 4.1.3

Für  $n \geq 4$  und  $1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$  gelten die folgenden Gleichungen:

(i)

$$d_{\max}^n(i, j) - d_{\max}^n(i, k) \leq d_{\max}^n(j, l) - d_{\max}^n(k, l)$$

und

(ii)

$$d_{\max}^n(i, l) - d_{\max}^n(i, k) \leq d_{\max}^n(j, l) - d_{\max}^n(j, k).$$

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

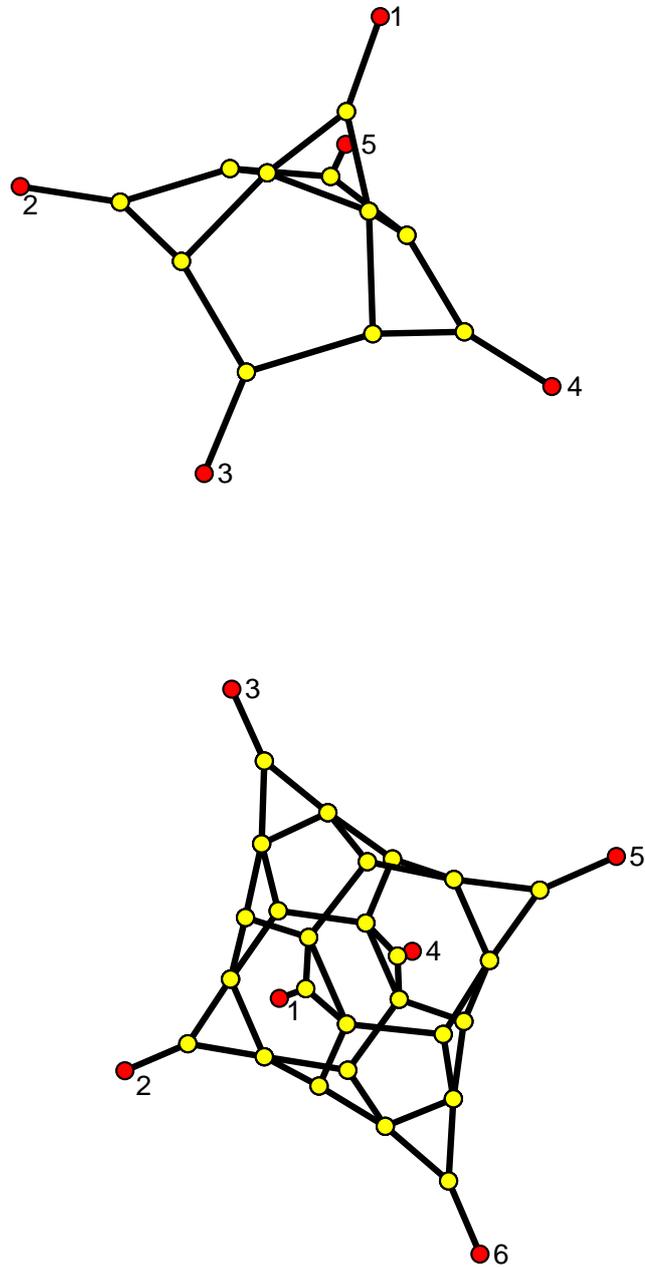


Abbildung 4.2.: Kombinatorische Darstellung der Tight-Spans von  $d_{\max}$  für  $n = 5, 6$ .

Beweis. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned} d_{\max}^n(i, j) - d_{\max}^n(i, k) &= \frac{n^2 + ni + k - n^2 - ni - j}{(n^2 + ni + j)(n^2 + ni + k)} = \frac{k - j}{(n^2 + ni + j)(n^2 + ni + k)} \\ &\leq \frac{k - j}{n^4} \quad \text{und} \\ d_{\max}^n(j, l) - d_{\max}^n(k, l) &= \frac{n^2 + nk + l - n^2 - nj - l}{(n^2 + nj + l)(n^2 + nk + l)} = \frac{n(k - j)}{(n^2 + nj + l)(n^2 + ni + l)} \\ &\geq \frac{n(k - j)}{(2n^2)(2n^2)} = \frac{k - j}{4n^3}. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $n \geq 4$  gilt, folgt (i).

Für die zweite Behauptung schreiben wir

$$\begin{aligned} d_{\max}^n(i, l) - d_{\max}^n(i, k) &= \frac{n^2 + ni + k - n^2 - ni - l}{(n^2 + ni + l)(n^2 + ni + k)} = \frac{k - l}{(n^2 + ni + l)(n^2 + ni + k)} \\ &\quad \text{und} \\ d_{\max}^n(j, l) - d_{\max}^n(j, k) &= \frac{n^2 + nj + k - n^2 - nj - l}{(n^2 + nj + l)(n^2 + nj + k)} = \frac{k - l}{(n^2 + nj + l)(n^2 + nj + k)}. \end{aligned}$$

Wegen  $i < j$  und  $k < l$  folgt auch (ii).  $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas wollen wir nun zeigen, dass  $d_{\max}^n$  tatsächlich eine obere Schranke ist. Wir untersuchen dafür die Struktur von  $d_{\max}^n$ :

#### Satz 4.1.4

Für die Metrik  $d_{\max}^n$  gilt

- (i) Ist  $n$  gerade, so gibt es in  $\Delta_{d_{\max}^n}$  genau einen Simplex der Dimension  $\frac{n}{2}-1$ .
- (ii) Ist  $n$  ungerade, so gibt es in  $\Delta_{d_{\max}^n}$  genau  $n$  Simplexe der Dimension  $\frac{n-1}{2}$ .
- (iii) Die Eigenschaften (i) und (ii) gelten auch für jede Einschränkung von  $d_{\max}^n$  auf eine  $m$ -elementige Teilmenge  $S$  von  $[n]$ .
- (iv) Für festes  $m \leq n$  und jede Einschränkung  $d'$  von  $d_{\max}^n$  auf eine  $m$ -elementige Teilmenge  $S$  von  $[n]$  hat  $\Delta_{d'}$  den gleichen  $F$ -Vektor.

Beweis. Wir beweisen direkt (iii) und nehmen  $m \geq 4$  an, für  $m \leq 4$  ist die Aussage klar. Dass es höchstens so viele Simplexe der entsprechenden Dimension geben kann, folgt aus Satz 3.2.7. Wir ordnen die Elemente von  $S$  der Größe nach und bezeichnen sie mit  $i_1, i_2, \dots, i_m$ . Außerdem sei  $d_{jk}$  der Abstand  $d_{\max}^n(i_j, i_k)$  vom  $j$ -ten zum  $k$ -ten Element.

Sei nun zunächst  $m$  ungerade. Wir zeigen, dass es einen Zyklus  $C$  der Länge  $m$  gibt, der alle Punkte aus  $S$  trifft und optimal ist. Dann können wir auf  $m$  Arten  $\frac{m+1}{2}$  Kanten aus  $C$  auswählen und erhalten  $m$  aufspannende Teilgraphen, die  $m$  inneren Simplexen der Dimension  $\frac{m-1}{2}$  entsprechen.

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

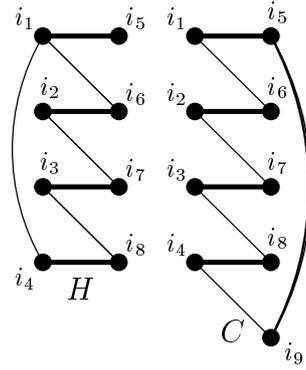


Abbildung 4.3.: Die Graphen  $H$  ( $m = 8$ ) und  $C$  ( $m = 9$ ) aus dem Beweis von Satz 4.1.4.

Wir möchten zeigen, dass der Zyklus  $C = (i_1, i_{\frac{m+1}{2}+1}, i_2, i_{\frac{m+1}{2}+2}, \dots, i_{\frac{m-1}{2}}, i_n, i_{\frac{m+1}{2}}, i_1)$  (siehe Abbildung 4.3) die gewünschte Eigenschaft hat. Wir benutzen dafür Satz 3.2.9 und unterscheiden bezüglich des Paares  $(i_j, i_l) \notin C$  vier Fälle:

- (i)  $j < l < \frac{m+1}{2}$

Es ist zu zeigen:

$$d_{jl} \leq \sum_{k=l}^{\frac{m-1}{2}} \left( d_{k, \frac{m+1}{2}+k} - d_{k+1, \frac{m+1}{2}+k} \right) + d_{1, \frac{m+1}{2}} - \sum_{k=1}^{j-1} \left( d_{k, \frac{m+1}{2}+k} - d_{k+1, \frac{m+1}{2}+k} \right). \quad (4.1.8)$$

Dafür schreiben wir

$$d_{jl} - d_{1, \frac{m+1}{2}} = \sum_{k=l}^{\frac{m-1}{2}} (d_{j,k} - d_{j,k+1}) - \sum_{k=1}^{j-1} \left( d_{k, \frac{m+1}{2}} - d_{k+1, \frac{m+1}{2}} \right).$$

Für den ersten Teil der Summe gilt wegen  $j \leq k \leq k+1 \leq \frac{m+1}{2} + k$  nach Lemma 4.1.3 (i) die Ungleichung

$$d_{j,k} - d_{j,k+1} \leq d_{k, \frac{m+1}{2}+k} - d_{k+1, \frac{m+1}{2}+k},$$

und im zweiten Teil wegen  $k \leq k+1 \leq \frac{m+1}{2} \leq \frac{m+1}{2} + k$  nach Lemma 4.1.3 (ii) die Ungleichung

$$d_{k, \frac{m+1}{2}} - d_{k+1, \frac{m+1}{2}} \geq d_{k, \frac{m+1}{2}+k} - d_{k+1, \frac{m+1}{2}+k}.$$

Hieraus folgt nun (4.1.8).

(ii)  $\frac{m-1}{2} < j < l$ 

Es ist zu zeigen:

$$d_{jl} \leq \sum_{k=l}^{m-1} \left( d_{k-\frac{m-1}{2},k} - d_{k-\frac{m-1}{2},k+1} \right) + d_{\frac{m+1}{2},m} - \sum_{k=\frac{m+1}{2}}^{j-1} \left( d_{k-\frac{m-1}{2},k} - d_{k-\frac{m-1}{2},k+1} \right). \quad (4.1.9)$$

Dafür schreiben wir

$$d_{jl} - d_{\frac{m+1}{2},m} = \sum_{k=l}^{m-1} (d_{j,k} - d_{j,k+1}) - \sum_{k=\frac{m+1}{2}}^{j-1} (d_{k,m} - d_{k+1,m}).$$

Für den ersten Teil der Summe gilt wegen  $k - \frac{m-1}{2} \leq j \leq k \leq k+1$  nach Lemma 4.1.3 (ii) die Ungleichung

$$d_{j,k} - d_{j,k+1} \leq d_{k-\frac{m-1}{2},k} - d_{k-\frac{m-1}{2},k+1},$$

und im zweiten Teil wegen  $k - \frac{m-1}{2} \leq k \leq k+1 \leq m$  nach Lemma 4.1.3 (i) die Ungleichung

$$d_{k,m} - d_{k+1,m} \geq d_{k-\frac{m-1}{2},k} - d_{k-\frac{m-1}{2},k+1}.$$

Hieraus folgt nun (4.1.9).

(iii)  $j < l - \frac{m+1}{2} < \frac{m+1}{2} + j < l$ 

Es ist zu zeigen:

$$d_{jl} \leq \sum_{k=j}^{l-\frac{m+3}{2}} \left( d_{k,\frac{m+1}{2}+k} - d_{k+1,\frac{m+1}{2}+k} \right) + d_{l-\frac{m+1}{2},l}. \quad (4.1.10)$$

Dafür schreiben wir

$$d_{jl} - d_{l-\frac{m+1}{2},l} = \sum_{k=j}^{l-\frac{m+3}{2}} (d_{k,l} - d_{k+1,l}).$$

Hier gilt wegen  $k \leq k+1 \leq \frac{m+1}{2} + k \leq l$  nach Lemma 4.1.3 (ii) die Ungleichung

$$d_{k,l} - d_{k+1,l} \leq d_{k,\frac{m+1}{2}+k} - d_{k+1,\frac{m+1}{2}+k}.$$

Hieraus folgt nun (4.1.10).

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

(iv)  $l - \frac{m-1}{2} < j < \frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2} < l < j + \frac{m+1}{2}$

Es ist zu zeigen:

$$d_{jl} \leq \sum_{k=l}^{j+\frac{m-3}{2}} \left( d_{k-\frac{m-1}{2},k} - d_{k-\frac{m-1}{2},k+1} \right) + d_{j,j+\frac{m-1}{2}}. \quad (4.1.11)$$

Dafür schreiben wir

$$d_{jl} - d_{j,j+\frac{m-1}{2}} = \sum_{k=l}^{j+\frac{m-3}{2}} (d_{j,k} - d_{j,k+1}).$$

Hier gilt wegen  $k - \frac{m-1}{2} \leq j \leq k \leq k + 1$  nach Lemma 4.1.3 (ii) die Ungleichung

$$d_{j,k} - d_{j,k+1} \leq d_{k-\frac{m-1}{2},k} - d_{k-\frac{m-1}{2},k+1}.$$

Hieraus folgt nun (4.1.11).

Damit ist der Fall  $m$  ungerade bewiesen.

Im Fall  $m$  gerade zeigen wir, dass der Graph  $H$ , der aus dem Zyklus  $(i_1, i_{\frac{m}{2}+2}, i_2, i_{\frac{m}{2}+3}, \dots, i_{\frac{m}{2}-1}, i_m, i_{\frac{m}{2}}, i_1)$  und der Kante  $(i_1, i_{\frac{m}{2}+1})$  besteht (siehe Abbildung 4.3), optimal ist. Der Graph  $H$  hat den aufspannenden Teilgraphen  $\{(i_k, i_{k+\frac{m}{2}}) \mid 1 \leq k < \frac{m}{2}\}$ , welcher aus  $\frac{m}{2}$  Kanten besteht und somit einem inneren Simplex der Dimension  $\frac{m}{2} - 1$  entspricht.

Der Beweis verläuft im Wesentlichen analog zum Fall  $m$  ungerade, es muss nur der Sonderfall der Kante  $(i_{\frac{m}{2}+1}, i_j)$  betrachtet werden. Wir unterscheiden also zwei zusätzliche Fälle:

(i)  $j < \frac{m}{2} + 1$

Es ist zu zeigen:

$$d_{j,\frac{m}{2}+1} \leq d_{1,\frac{m}{2}+1} - \sum_{k=1}^{j-1} \left( d_{k,k+\frac{m}{2}+1} - d_{k+1,k+\frac{m}{2}+1} \right). \quad (4.1.12)$$

Dafür schreiben wir

$$d_{j,\frac{m}{2}+1} - d_{1,\frac{m}{2}+1} = - \sum_{k=1}^{j-1} \left( d_{k,\frac{m}{2}+1} - d_{k+1,\frac{m}{2}+1} \right).$$

Hier gilt wegen  $k \leq k+1 \leq \frac{m}{2} + 1 \leq k + \frac{m}{2} + 1$  nach Lemma 4.1.3 (ii) die Ungleichung

$$d_{k,\frac{m}{2}+1} - d_{k+1,\frac{m}{2}+1} \geq d_{k,k+\frac{m}{2}+1} - d_{k+1,k+\frac{m}{2}+1}.$$

Hieraus folgt nun (4.1.12).

(ii)  $\frac{m}{2} + 1 < j$ 

Es ist zu zeigen:

$$d_{\frac{m}{2}+1,j} \leq \sum_{k=j}^{m-1} \left( d_{k-\frac{m}{2},k} - d_{k-\frac{m}{2},k+1} \right) + d_{\frac{m}{2},m} - d_{1,\frac{m}{2}} + d_{1,\frac{m}{2}+1}. \quad (4.1.13)$$

Dafür schreiben wir

$$d_{\frac{m}{2}+1,j} - d_{1,\frac{m}{2}+1} = \sum_{k=j}^{m-1} \left( d_{\frac{m}{2}+1,k} - d_{\frac{m}{2}+1,k+1} \right) + d_{\frac{m}{2}+1,m} - d_{1,\frac{m}{2}+1}.$$

Hier gilt wegen  $k - \frac{m}{2} \leq \frac{m}{2} + 1 \leq k \leq k + 1$  nach Lemma 4.1.3 (ii) die Ungleichung

$$d_{\frac{m}{2}+1,k} - d_{\frac{m}{2}+1,k+1} \leq d_{k-\frac{m}{2},k} - d_{k-\frac{m}{2},k+1},$$

und wegen  $1 \leq \frac{m}{2} \leq \frac{m}{2} + 1 \leq m$  außerdem nach Lemma 4.1.3 (i) die Ungleichung

$$d_{\frac{m}{2}+1,m} - d_{1,\frac{m}{2}+1} \leq d_{\frac{m}{2},m} - d_{1,\frac{m}{2}}.$$

Hieraus folgt nun (4.1.13).

Die Behauptung (iv) ergibt sich mit Induktion aus Teil (iii) und Korollar 2.1.4.  $\square$ **Korollar 4.1.5***Die Metrik  $d_{\max}^n$  erreicht die obere Schranke aus Satz 4.1.1.**Beweis.* Dies ergibt sich aus dem Beweis von Satz 4.1.1, da wir dort als obere Schranke den  $F$ -Vektor eines Tight-Spans berechnet haben, der den Bedingungen (iii) und (iv) aus Satz 4.1.4 genügt.  $\square$ 

## 4.2. Untere Schranke

Nach [Dev04, Theorem 3.1] hat der Tight-Span einer generischen Metrik mindestens Dimension  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Für die Mindestanzahl von Seiten dieser Dimension können wir hier Folgendes zeigen:**Satz 4.2.1***Sei  $d$  eine generische Metrik auf  $n$  Punkten. Dann hat der Tight-Span von  $d$  mindestens Dimension  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ . In diesem Fall gilt*

$$F_{\lceil \frac{n}{3} \rceil} \geq \begin{cases} n \cdot 3^{k-2} + 3^k & n = 3k; k \in \mathbb{N} \\ 3^{k-1} & n = 3k + 1; k \in \mathbb{N} \\ 5 \cdot 3^{k-1} & n = 3k + 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

#### 4. Obere und untere Schranken für den $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

*Beweis.* Sei  $c$  das Maximum der Aufgabe (3.2.12) für  $\omega = (1, \dots, 1)$  und  $G$  der zugehörige optimale Graph nach Satz 3.2.5. Nach Lemma 3.2.11 mit  $B = 1$  besteht  $G$  nur aus isolierten Kanten und ungeraden Zyklen. Um die kleinstmögliche Dimension im Tight-Span zu bekommen, müssen wir den größten minimalen aufspannenden Teilgraphen finden. Ein (ungerader) Zyklus der Länge  $k$  hat einen aufspannenden Teilgraphen der Länge  $\frac{k+1}{2}$ . Der größtmögliche aufspannende Teilgraph ergibt sich also bei möglichst vielen Zyklen der Länge 3. Somit finden wir auf jeden Fall Teilgraphen der Größe  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ , was der Dimension  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  im Tight-Span entspricht. Da es für jeden Zyklus der Länge 3 drei mögliche aufspannende Teilgraphen gibt, erhalten wir im Fall  $n = 3k$  insgesamt  $3^k$  Simplexe, in den beiden anderen Fällen jeweils  $3^{k-1}$ . Der Fall  $n = 3k + 1$  ist somit bewiesen.

Im Fall  $n = 3k$  betrachten wir analog Aufgabe (3.2.12) mit  $\omega = (3, 1, \dots, 1)$ . Wir bekommen wieder einen optimalen Graphen und benutzen Lemma 3.2.11 mit  $B = 3$ . Im ersten der dort beschriebenen Fälle hätte unser Graph maximal 3 (aus der Zusammenhangskomponente der Ecke 1) plus  $2(k-2)$  (aus den 3-Zyklen und isolierten Kanten im Rest), also zusammen  $2k-1 < \frac{2n}{3}$  Kanten, was nicht sein kann, da wir voraussetzen, dass es keinen so kleinen inneren Simplex gibt. Also muss der zweite in Lemma 3.2.11 beschriebene Fall eintreten. Hier enthält ein aufspannender Teilgraph im maximalen Fall (das heißt wir wählen wieder 3-Zyklen) 3 (Zusammenhangskomponente der Ecke 1) plus  $2k-3$ , also insgesamt  $\frac{2n}{3}$  Kanten. Da wir wieder in jedem 3-Zyklus drei aufspannende Teilgraphen auswählen können, bekommen wir so  $3^{k-2}$  neue Graphen der gewünschten Größe. Da sie eine Ecke vom Grad 3 enthalten, sind sie von den obigen verschieden. Wiederholung dieser Argumentation für alle  $n$  Ecken ergibt insgesamt  $n \cdot 3^{k-2}$  zusätzliche Graphen und somit die Behauptung für  $n = 3k$ .

Nun ist noch der Fall  $n = 3k + 2$  zu betrachten. Hierzu seien  $j$  und  $k$  die beiden Ecken, die im Graphen  $G$  in keinem der 3-Zyklen liegen. Wir argumentieren nun analog wie oben, wobei wir diesmal als  $\omega$  den Vektor wählen, dessen  $j$ -te Komponente gleich Zwei ist und die restlichen gleich Eins. Der erste Fall in Lemma 3.2.11 ist wieder ausgeschlossen, da wir hier maximal  $2 + 2(k-1) = 2k < \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  Kanten im größten aufspannenden Teilgraphen haben können. Somit tritt wieder der zweite Fall ein und wir bekommen maximal  $3 + 2(k-1) = 2k+1 = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  Kanten. Da die Ecken hier Grad 2 haben, was oben nicht der Fall ist, bekommen wir  $3^{k-1}$  zusätzliche Seiten der maximalen Dimension. Analoge Argumentation für  $k$  anstelle von  $j$  liefert den Rest der Behauptung.  $\square$

##### 4.2.1. Eine Metrik für die untere Schranke

Auch für die untere Schranke werden wir nun eine Metrik angeben. Zuerst definieren wir allgemeiner eine Metrik zu einem Graphen:

**Definition 4.2.2** Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Punkten. Die Metrik  $d_G : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  ist dann definiert durch

$$d_G(i, j) = \begin{cases} 2; & \text{falls } (i, j) \in G \\ 1 + \frac{1}{n^2 + in + j}; & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Werte  $d_G(i, j)$  für  $(i, j) \notin G$  können auch anders gewählt werden. Wichtig ist nur, dass diese Werte alle linear unabhängig über  $\mathbb{Q}$  sind (damit die Metrik generisch wird) und, dass  $1 < d_G(i, j) < 1 + \frac{1}{n^2}$  gilt. Sei nun  $n$  gegeben und  $G_{\min}^n$  definiert durch

$$(i, j) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{j-1}{3} \rfloor; & n \equiv_3 0, 1 \\ \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{j-1}{3} \rfloor \text{ und } i, j < n; & n \equiv_3 2 \end{cases}.$$

Wir setzen dann  $d_{\min}^n := d_{G_{\min}^n}$ .

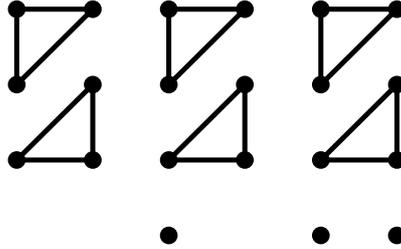


Abbildung 4.4.: Die Graphen  $G_{\min}^n$  für  $n = 6, 7, 8$ .

Die Metrik  $d_{\min}^n$  besteht also aus  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  Dreiecken, deren Punkte untereinander Abstand 2 haben (siehe Abbildung 4.4), und im Übrigen gilt  $d_{\min}^n(i, j) = d_{\max}^n(i, j)$ . Im Wesentlichen entspricht  $d_{\min}^n$  der in [Dev04] angegebenen Metrik für die untere Schranke.

Im oberen Teil von Abbildung 4.5 ist eine Darstellung des Tight-Spans von  $d_{\min}^5$  zu sehen, die versucht die metrischen Eigenschaften zu berücksichtigen. Die beiden \* deuten an, dass an diesen Stellen eigentlich vier Punkte des Tight-Spans sind, diese aber so nahe beieinander sind, dass nur einer zu sehen ist. Im unteren Teil der Abbildung ist eine Darstellung der Kombinatorik von  $d_{\min}^6$  zu sehen. Die kombinatorische Darstellung von  $d_{\min}^5$  ist die gleiche wie jene von  $d_{\max}^5$  in Abbildung 4.2. (Zu den Abbildungen beachte auch die Anmerkungen in Kapitel 1.)

In Tabelle 4.2 wurde der  $F$ -Vektor für  $d_{\min}^n$  bis  $n = 19$  berechnet. Wir werden nun zeigen, dass diese Metrik die oben bewiesene untere Schranke erreicht.

**Satz 4.2.3**

Für alle  $n$  ist  $d_{\min}^n$  generisch.

*Beweis.* Der Beweis geht fast analog wie der für  $d_{\max}^n$  in Satz 4.1.2. Es muss lediglich beachtet werden, dass zunächst nur folgt, dass in (4.1.7) nur Summanden aus Dreiecken vorkommen können. Da aus solchen jedoch kein gerader Zyklus gebildet werden kann, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.2.4**

Die untere Schranke in Satz 4.2.1 wird durch  $d_{\min}^n$  erreicht.

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

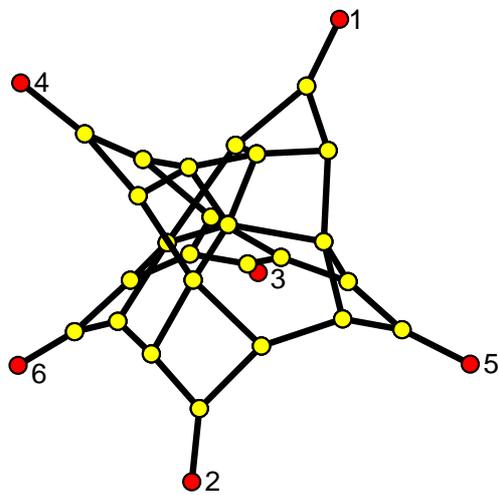
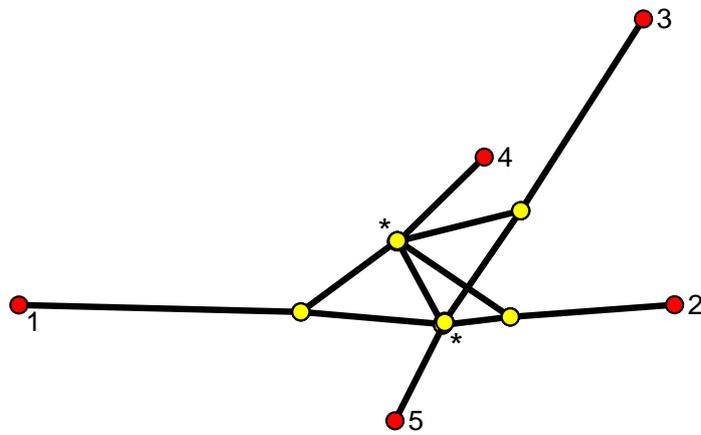


Abbildung 4.5.: Darstellung der Tight-Spans von  $d_{\min}^n$  für  $n = 5, 6$ .

*Beweis.* Es muss gezeigt werden, dass der Tight-Span von  $d_{\min}^n$  tatsächlich nur die geforderte Anzahl von Seiten der Dimension  $k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  besitzt. Diese Seiten entsprechen Simplexen der Dimension  $(n - 1) - \lceil \frac{n}{3} \rceil = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1$ , also optimale Graphen mit  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  Kanten.

Sei ein optimaler Graph  $G$  mit  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  Kanten gegeben. Wir bezeichnen mit  $a_i$  die Anzahl der Dreiecke von  $d_{\min}^n$ , in denen genau  $i$  Kanten von  $G$  liegen. Es gilt dann  $n = 3(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (n \bmod 3)$  und wir haben  $a_1 + 2a_2 + 3a_3$  Kanten innerhalb von Dreiecken. Da  $G$  aufspannend sein soll, müssen noch von mindestens  $a_1 + 3a_0$  Ecken in solchen Dreiecken Kanten ausgehen. Wir werden im Folgenden zuerst zeigen, dass nicht zwei dieser Kanten übereinstimmen können, und anschließend, dass  $a_0 = a_3 = 0$  gilt.

Sei also ohne Einschränkung  $(1, 4)$  eine Kante zwischen den beiden Dreiecken  $\{1, 2, 3\}$  und  $\{4, 5, 6\}$ . Dann gibt es eine Kante  $(2, i)$ , die von der Ecke 2 ausgeht. Es folgt nun sofort, dass  $i \in \{1, 3, 4\}$ , denn sonst könnten wir  $(1, 4)$  und  $(2, i)$  in  $G$  durch  $(1, 2)$  und  $(4, i)$  ersetzen (siehe Abbildung 4.6, die dünnen Striche entsprechen den Dreiecken, die dicken dem Graphen) und erhielten einen Widerspruch zu Satz 3.2.1, da wir  $G$  als optimal angenommen haben und für den neuen Graphen  $G'$  der Wert  $G'^T d_{\min}^n$  größer ist. Analoge Argumentation ergibt nun, dass  $G$  auch aus den Mengen  $\{(3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$ ,  $\{(5, 4), (5, 6), (5, 1)\}$  und  $\{(6, 4), (6, 5), (6, 1)\}$  jeweils eine Kante enthalten muss.

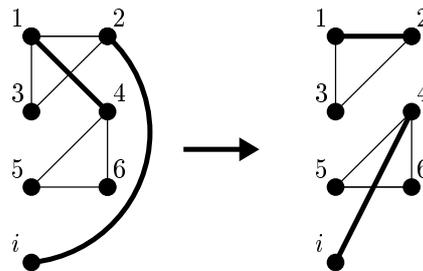


Abbildung 4.6.

Sei zuerst  $i = 3$ , enthalte  $G$  also die Kante  $(2, 3)$ . Dann kann  $G$  weder  $(6, 1)$  noch  $(5, 6)$  enthalten, denn ansonsten könnten die in Abbildung 4.7 beschriebenen Ersetzungen vorgenommen werden. (Dabei deuten die getrichelten Linien an, dass diese Kanten Gewicht  $\frac{1}{2}$  bekommen.) Somit enthält  $G$  die Kante  $(6, 4)$  und analog die Kante  $(5, 4)$ , was aber nicht sein kann, da wir angenommen hatten, dass die Dreiecke zu  $a_0$  oder  $a_1$  gehören.

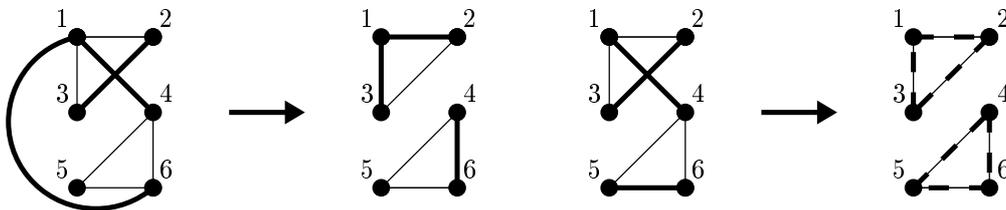


Abbildung 4.7.

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von *Tight-Spans generischer Metriken*

Sein nun  $i = 4$ , also die Kante  $(2, 4)$  in  $G$  enthalten. Auch in diesem Fall können wir wieder sehen (Abbildung 4.8), dass  $(6, 1)$  und  $(5, 6)$  nicht in  $G$  enthalten sein können und erhalten wie im Fall  $i = 3$  einen Widerspruch.

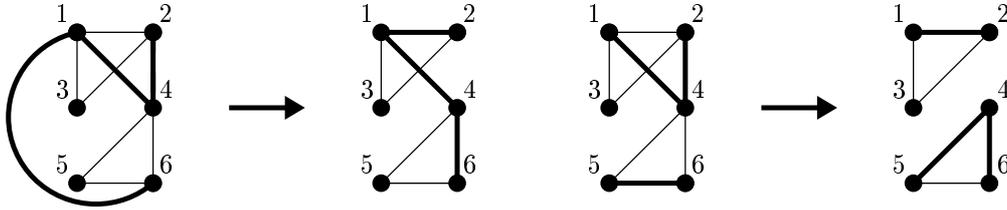


Abbildung 4.8.

Somit ist die Kante  $(1, 2)$  in  $G$  enthalten. Ersetzen wir in dieser Argumentation jeweils die Ecke 2 durch die Ecke 3, sehen wir aber, dass auch die Kante  $(1, 3)$  in  $G$  enthalten ist, was wiederum im Widerspruch zu unserer Annahme zu einem Dreieck der Sorte  $a_2$  (oder  $a_3$ ) führt.

Insgesamt bekommen wir nun also genau

$$(a_1 + 2a_2 + 3a_3) + (a_1 + 3a_0) = 3a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 \quad (4.2.14)$$

Kanten, die Punkte in Dreiecken beinhalten. Im Fall  $n \equiv_3 0, 1$  sind dies alle Kanten, und es gilt  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor = 2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$ . Da wir  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  Kanten haben, folgt daraus mit (4.2.14)  $a_0 = a_3 = 0$ .

Ist  $n \equiv_3 2$ , so ist  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor = 2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + 1$  und für die Anzahl der Kanten gibt es zwei Fälle, abhängig davon, ob die beiden Ecken, die in keinem Dreieck liegen, durch eine Kante verbunden sind, oder nicht. Sind sie verbunden, gibt es insgesamt  $3a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 1$  Kanten, und es folgt wieder  $a_0 = a_3 = 0$ . Sind sie dies nicht, müsste  $a_0 + a_3 = 1$  gelten. Wir zeigen, dass dieser Fall nicht auftreten kann.

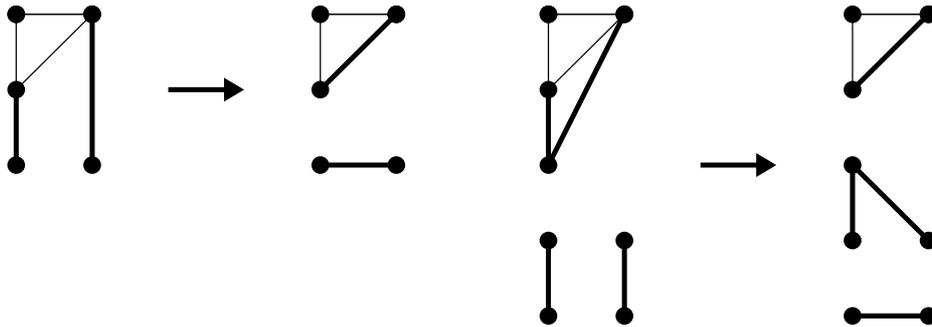


Abbildung 4.9.

Aus Abbildung 4.9 können wir zunächst entnehmen, dass  $a_0 = 0$  gilt, denn sonst ist eine der beiden gezeigten Modifikationen möglich, die wieder der Optimalität von  $G$

widersprechen. Ist hingegen  $a_3 = 1$ , so kann man den Untergraphen  $G'$  von  $G$  betrachten, der durch Entfernung der Ecken aus dem Dreieck mit den drei Kanten besteht. Für diesen gilt dann  $a_0 = a_3 = 0$  und er hätte einerseits  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 3 = 2(a_1 + a_2) - 1$  Kanten, andererseits aber nach (4.2.14) höchstens  $2a_1 + 2a_2$ , was nicht sein kann.

Es gilt also in jedem Fall  $a_0 = a_3 = 0$  und wir werden jetzt sehen, dass außerdem  $a_1 < 2$  gelten muss. Wäre nämlich  $a_1 \geq 2$ , so tritt einer der beiden Fälle in Abbildung 4.10 auf, und wir können wie dort gezeigt modifizieren. Im ersten Fall ist wieder klar, dass so ein Widerspruch zur Minimalität von  $G$  entsteht. Für den zweiten Fall nehmen wir ohne Einschränkung an, dass die Ecken im unteren Dreieck niedrigere Nummern haben. Wir bezeichnen die unterste Ecke mit  $i$ , die Ecken im oberen Dreieck mit  $j_1, j_2, j_3$  und die im unteren Dreieck mit  $k_1, k_2, k_3$ . Damit bekommen wir auf der linken Seite

$$2 + 2 + d^n \min(i, j_3) + d_{\min}^n(i, k_3)$$

und auf der rechten

$$1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} (d_{\min}^n(i, k_2) + d_{\min}^n(i, k_1)) + d_{\min}^n(i, k_3).$$

Um zu sehen, dass die Summe der rechten Seite größer ist, müssen wir  $d_{\min}^n(i, j_3) < \frac{1}{2} (d_{\min}^n(i, k_2) + d_{\min}^n(i, k_1))$  zeigen. Dies folgt aber aus  $j_3 > k_1, k_2$  und der Tatsache, dass unsere Metrik so definiert ist, dass  $d_{\min}^n(j, l) < d_{\min}^n(j, k)$  gilt, falls  $j < k$  und keine zwei dieser drei Punkte in einem Dreieck liegen.

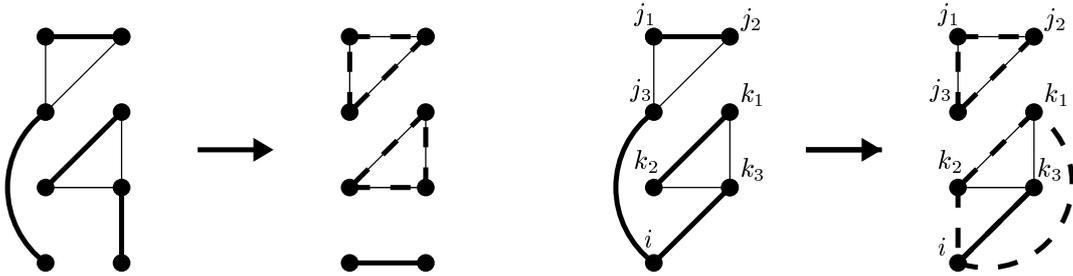


Abbildung 4.10.

Wir wissen also nun, dass entweder  $a_1 = 0$  und  $a_2 = k$  oder  $a_1 = 1$  und  $a_2 = k - 1$  gilt. Um den Satz zu beweisen, betrachten wir nun getrennt die folgenden drei Möglichkeiten:

- $n \equiv_3 0$ : Im Fall  $a_2 = k$  und  $a_1 = 0$  gibt es keine Kanten zwischen den Dreiecken und wir können in jedem Dreieck jeweils zwei Kanten auswählen, erhalten insgesamt also  $3^k$  mögliche Graphen. Wenn  $a_1 = 1$  und  $a_2 = k - 1$ , gibt es eine Kante zwischen dem Dreieck mit nur einer Kante in  $G$  und einer Ecke eines anderen Dreiecks. Diese Ecke hat dann Grad 3, sonst kann  $G$ , wie im linken Teil von Abbildung 4.11 zu sehen ist (Dabei hat die dicke Kante das Gewicht  $\frac{3}{2}$ ), nicht optimal sein. Für jede solche Ecke kann es aber nur einen optimalen Graphen geben, denn sonst gibt es eine der Kanten  $E$  zu einer Ecke aus einem anderen Dreieck, deren Wert in  $d_{\min}^n$  größer

4. Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken

ist als der aller anderen solcher Kanten. In diesem Fall könnte man aber, wie im rechten Teil von Abbildung 4.11 gezeigt, für jede andere Kante einen Widerspruch zur Optimalität herleiten. Da wir in allen außer diesen beiden Dreiecken wieder zwei Kanten auswählen können, kommen somit noch (maximal)  $n \cdot 3^{k-2}$  Graphen dazu, was genau die Behauptung liefert.

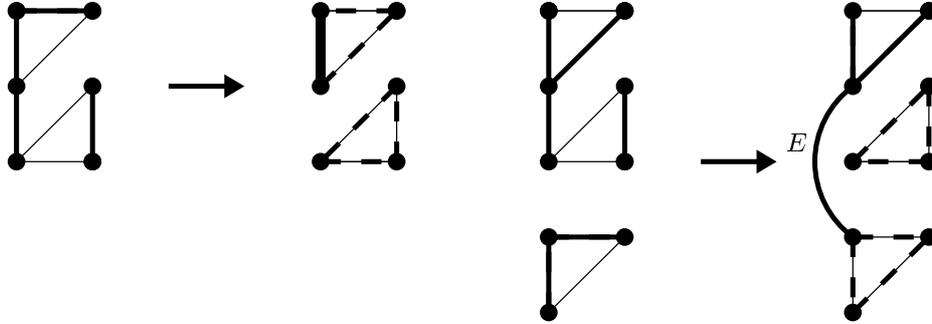


Abbildung 4.11.

- $n \equiv_3 1$ : Hier sieht man zusätzlich sofort, dass  $a_1 = 1$  gilt, da eine Kante zu der Ecke führen muss, die in keinem Dreieck enthalten ist. Zusätzlich erkennt man, dass in jedem optimalen Graphen diese Kante die gleiche ist, denn ansonsten könnte man wieder wie im rechten Teil von Abbildung 4.11 vorgehen. Da man in jedem Dreieck der Form  $a_2$  wieder zwei Kanten auswählen kann, kommen noch insgesamt  $3^{k-1}$  Simplexe dazu.

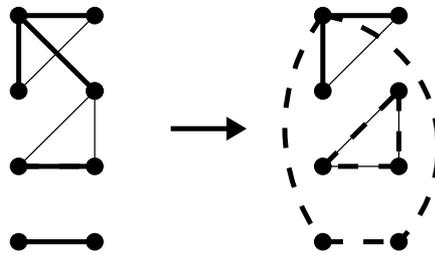


Abbildung 4.12.

- $n \equiv_3 2$ : Hier muss man wieder beide Fälle betrachten. Im ersten bekommt man  $3^k$  mögliche Graphen. Im Fall  $a_1 = 1$  können wir hier jedoch mit Abbildung 4.12 sehen, dass die Kante, die aus dem Dreieck mit nur einer inneren Kante kommt, nicht zu einem anderen Dreieck führen kann. Sie muss also zu einer der beiden Ecken außerhalb der Dreiecke führen, und es ist wieder klar, dass es für jede dieser Ecken nur wieder eine andere Ecke geben kann, zu der eine Kante in einem optimalen

Graphen führt. Also kommen  $2 \cdot 3^{k-1}$  Möglichkeiten dazu und in der Summe ergibt sich genau der gewünschte Wert.

Damit ist der Beweis vollständig.  $\square$

Es bleibt hier noch die Frage nach einer unteren Schranke für alle Komponenten des  $F$ -Vektors einer generischen Metrik offen. Natürlich liegt die Vermutung nahe, dass die Komponenten von  $d_{\min}^n$  eine untere Schranke für den  $F$ -Vektor des Tight-Spans einer beliebigen generischen Metrik auf  $n$  Punkten bilden. Es wäre also die Frage zu beantworten, ob dies tatsächlich der Fall ist, und außerdem wie man den  $F$ -Vektor von  $d_{\min}^n$  explizit angeben kann. Die Berechnung des  $F$ -Vektors von  $d_{\min}^n$  ist aber, zumindest theoretisch, mit Hilfe von Korollar 2.1.4 möglich. Das Problem dabei ist allerdings, dass (im Gegensatz zum Verhalten der Metrik  $d_{\max}^n$ ) die Untermetriken von  $d_{\min}^n$  kombinatorisch ganz verschieden sind. Man kann diese jedoch klassifizieren: Alle diese Metriken entstehen aus einem Graphen  $G$ , dessen Zusammenhangskomponenten nur Dreiecke, zwei verbundenen Kanten und einzelne Kanten sind, und der außerdem isolierte Punkte enthalten kann. Die Aufgabe wäre also, allgemein für eine Metrik von solcher Form eine Formel für den  $F$ -Vektor zu finden.

$n$	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$
4	8	8	1					
5	16	20	5					
6	31	45	15					
7	60	100	44	3				
8	114	213	115	15				
9	217	450	288	54				
10	409	933	696	180	9			
11	773	1921	1626	522	45			
12	1453	3918	3735	1458	189			
13	2738	7943	8383	3834	684	27		
14	5224	16269	18848	9855	2178	135		
15	9679	32130	40650	24165	6615	648		
16	18423	64960	88769	58548	18720	2484	81	
17	35571	133209	196393	143106	52560	8613	405	
18	64963	256077	403362	321759	135270	27945	2187	
19	125133	519869	872844	754173	352044	84483	8748	243

Tabelle 4.2.: Die  $F$ -Vektoren der Metriken  $d_{\min}^n$ .

4. *Obere und untere Schranken für den  $F$ -Vektor von Tight-Spans generischer Metriken*

# A. Genocchi-Zahlen

Die *Genocchi-Zahlen* sind definiert als Koeffizienten der erzeugenden Funktion  $\frac{2t}{e^t+1}$ :

$$\frac{2t}{e^t+1} =: \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = t + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \quad (\text{A.0.1})$$

Ihre Untersuchung geht wohl schon auf Euler zurück, die Benennung nach dem italienischen Mathematiker Angelo Genocchi (1817–1889), der sich intensiv mit ihnen beschäftigte, taucht vermutlich zum ersten Mal in [Luc91] auf. Später wurden sie unter anderem von Bell in [Bel26] und [Bel29] untersucht.

Die Genocchi-Zahlen stehen über

$$G_{2n} = 2(1 - 2^{2n})B_{2n}$$

in Verbindung mit den bekannten Bernoulli-Zahlen.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G_{2n}$	-1	1	-3	17	-155	2073	-38227	929569	-28820619	1109652905

Tabelle A.1.: Die ersten Werte der Genocchi-Zahlen.

Dumont hat 1974 in [Dum74] eine kombinatorische Interpretation der Genocchi-Zahlen gegeben. Der Betrag von  $G_n$  entspricht der Anzahl der Permutationen  $\tau$  von  $[n]$  derart, dass  $\tau(i) > i$  genau dann, wenn  $i$  ungerade (und  $k < n$ ) ist.

Die ersten Werte dieser Zahlen sind in Tabelle A.1 dargestellt. Die Werte  $G_i$  für  $i$  ungerade sind mit Ausnahme von  $G_1 = 1$  alle identisch 0. Für weitere Informationen siehe auch [Slo05, Sequence A001469].

## A.1. Eine Rekursion für die Genocchi-Zahlen

Es gibt viele Möglichkeiten die Genocchi-Zahlen zu berechnen (siehe zum Beispiel [Leh35], [TT45], [Kre97], [ES00], oder [Dom04]). Die Formel, die wir hier zeigen, wird in Abschnitt 2.2 dazu benutzt, eine Verbindung mit unseren Gleichungen über triangulierte Bälle herzustellen.

A. Genocchi-Zahlen

**Satz A.1.1**

Für die Genocchi-Zahlen gelten die folgenden Rekursionen:

(i)

$$G_{2n} = -n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} G_{2k}$$

und

(ii)

$$G_{2n} = -1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k-1} \frac{G_{2k}}{2k}.$$

*Beweis.* Aus (A.0.1) erhalten wir für  $t \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{2}{e^t + 1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2n} \frac{t^{2n-1}}{(2n)!} \\ \Leftrightarrow 2 &= \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2n} \frac{t^{2n-1}}{(2n)!} \right) \left( 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Bildet man auf der rechten Seite das Cauchy-Produkt, dann liefert ein Vergleich der Koeffizienten vor  $t^{2n-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \frac{G_{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{(2n-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_{2k}}{(2k)!(2n-2k)!} \\ \Leftrightarrow G_{2n} &= -n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} G_{2k} \end{aligned}$$

und somit ist die erste Aussage bewiesen.

Für die zweite Rekursionsformel vergleichen wir die Koeffizienten vor  $t^{2n}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{G_{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{(2n)!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_{2k}}{(2k)!(2n-2k+1)!} \\ \Leftrightarrow G_{2n} &= -1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k-1} \frac{G_{2k}}{2k} \end{aligned}$$

□

# Literaturverzeichnis

- [BB97] BILLERA, Louis J. ; BJÖRNER, Anders: Face numbers of polytopes and complexes. In: GOODMAN, Jacob E. (Hrsg.) ; O'ROURKE, Joseph (Hrsg.): *Handbook of discrete and computational geometry*. Boca Raton, FL : CRC, 1997 (CRC Press Ser. Discrete Math. Appl.), Kapitel 15, S. 291–310. – ISBN 1-584-88301-4
- [Bel26] BELL, Eric T.: An algebra of sequences of functions, with an application to the Bernoullian functions. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 28 (1926), Nr. 1, S. 129–148. – ISSN 0002-9947
- [Bel29] BELL, Eric T.: Certain invariant sequences of polynomials. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 31 (1929), Nr. 3, S. 405–421. – ISSN 0002-9947
- [Dev04] DEVELIN, Mike: *Dimensions of tight spans*. preprint, [arXiv:math.MG/0403147](https://arxiv.org/abs/math/0403147), 2004. – erscheint in *Ann. Comb.*
- [DHM02] DRESS, Andreas W. M. ; HUBER, Katharina T. ; MOULTON, Vincent: An explicit computation of the injective hull of certain finite metric spaces in terms of their associated Buneman complex. In: *Adv. Math.* 168 (2002), Nr. 1, S. 1–28. – ISSN 0001-8708
- [DMT96] DRESS, Andreas W. M. ; MOULTON, Vincent ; TERHALLE, Werner: *T*-theory: an overview. In: *European J. Combin.* 17 (1996), Nr. 2-3, S. 161–175. – Discrete metric spaces (Bielefeld, 1994). – ISSN 0195-6698
- [Dom04] DOMARATZKI, Michael: Combinatorial interpretations of a generalization of the Genocchi numbers. In: *J. Integer Seq.* 7 (2004), Nr. 3. – Article 04.3.6, 11 pp. (electronic). – ISSN 1530-7638
- [Dre84] DRESS, Andreas W. M.: Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups: a note on combinatorial properties of metric spaces. In: *Adv. in Math.* 53 (1984), Nr. 3, S. 321–402. – ISSN 0001-8708
- [Dum74] DUMONT, Dominique: Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi. In: *Duke Math. J.* 41 (1974), S. 305–318. – ISSN 0012-7094

Literaturverzeichnis

- [ES00] EHRENBORG, Richard ; STEINGRÍMSSON, Einar: Yet another triangle for the Genocchi numbers. In: *European J. Combin.* 21 (2000), Nr. 5, S. 593–600. – ISSN 0195–6698
- [GJ00] GAWRILOW, Ewgenij ; JOSWIG, Michael: polymake: a Framework for Analyzing Convex Polytopes. In: KALAI, Gil (Hrsg.) ; ZIEGLER, Günter M. (Hrsg.): *Polytopes — Combinatorics and Computation*. Birkhäuser, 2000, S. 43–74. – ISBN 3–764–36351–7
- [Grü03] GRÜNBAUM, Branko: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 221: *Convex polytopes*. Second Edition. New York : Springer-Verlag, 2003. – 468 S. – ISBN 0–387–40409–0
- [Hub97] HUBER, Katharina: *A T-theoretical approach to phylogenetic analysis and cluster analysis*, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Diss., 1997
- [Isb64] ISBELL, John R.: Six theorems about injective metric spaces. In: *Comment. Math. Helv.* 39 (1964), S. 65–76. – ISSN 0010–2571
- [Kla] KLAIN, Daniel A.: *Dehn-Sommerville relations for triangulated manifolds*. <http://faculty.uml.edu/dklain/ds.pdf>
- [Kle64] KLEE, Victor: A combinatorial analogue of Poincaré’s duality theorem. In: *Canad. J. Math.* 16 (1964), S. 517–531. – ISSN 0008–414X
- [Kre97] KREWERAS, Germain: An additive generation for the Genocchi numbers and two of its enumerative meanings. In: *Bull. Inst. Combin. Appl.* 20 (1997), S. 99–103. – ISSN 1183–1278
- [Leh35] LEHMER, Derrick H.: Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler. In: *Ann. of Math. (2)* 36 (1935), Nr. 3, S. 637–649. – ISSN 0003–486–X
- [LST95] LOERA, Jesús A. ; STURMFELS, Bernd ; THOMAS, Rekha R.: Gröbner bases and triangulations of the second hypersimplex. In: *Combinatorica* 15 (1995), Nr. 3, S. 409–424. – ISSN 0209–9683
- [Luc91] LUCAS, Edouard: *Théorie des nombres. Tome premier: Le calcul des nombres entiers, le calcul des nombres rationnels, la divisibilité arithmétique*. Paris : Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, 1891. – Nachdruck: Editiones Jacques Gabay, Paris 1991 – ISBN 2-87647-042-X
- [McM70] MCMULLEN, Peter: The maximum numbers of faces of a convex polytope. In: *Mathematika* 17 (1970), S. 179–184. – ISSN 0025–5793
- [McM71] MCMULLEN, Peter: The numbers of faces of simplicial polytopes. In: *Israel J. Math.* 9 (1971), S. 559–570. – ISSN 0021–2172

- [McM04] McMULLEN, Peter: Triangulations of simplicial polytopes. In: *Beiträge Algebra Geom.* 45 (2004), Nr. 1, S. 37–46. – ISSN 0138–4821
- [PHPR05] POLTHIER, Konrad ; HILDEBRANDT, Klaus ; PREUSS, Eike ; REITEBUCH, Ulrich: *JavaView - Interactive 3D Geometry and Visualization*. <http://www.javaview.de>. Version: 2005
- [Sch01] SCHLÄFLI, Ludwig: Theorie der vielfachen Kontinuität. In: *Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft* (1901), Nr. 38, S. 1–237. – geschrieben 1850–1852; Nachdruck in „Ludwig Schläfli, 1814–1895, Gesammelte mathematische Abhandlungen“, Band 1, Birkhäuser, Basel 1959, S. 167–387
- [Slo05] SLOANE, Neil J. A.: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>. Version: 2005
- [Sta80] STANLEY, Richard P.: The number of faces of a simplicial convex polytope. In: *Adv. in Math.* 35 (1980), Nr. 3, S. 236–238. – ISSN 0001–8708
- [SY04] STURMFELS, Bernd ; YU, Josephine: Classification of six-point metrics. In: *Electron. J. Combin.* 11 (2004), Nr. 1. – Research Paper 44, 16 pp. (elektronisch). – ISSN 1077–8926
- [TT45] TERRILL, H. M. ; TERRILL, Ethel M.: Tables of numbers related to the tangent coefficients. In: *J. Franklin Inst.* 239 (1945), Nr. 1, S. 64–67. – ISSN 0016–0032
- [Zie95] ZIEGLER, Günter M.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 152: *Lectures on polytopes*. New York : Springer-Verlag, 1995. – 370 S. – ISBN 0–387–94365–X